UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

**ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES**

Année : 2008 N° B.U. : | | | | | | | | | |

POTENTIELS ISORÉSONANTS ET SYMÉTRIES

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : Mathématiques et Applications

Présentée et soutenue publiquement par

Aymeric AUTIN

le 24 octobre 2008 à l'Université de Nantes.

Président du jury	:	Didier Robert	Professeur (Université de Nantes)
Rapporteurs	:	Alain Grigis	Professeur (Université de Paris XIII)
		Alejandro Uribe	Professeur (University of Michigan)
Examinateurs	:	Alain Grigis	Professeur (Université de Paris XIII)
		Laurent Guillopé	Professeur (Université de Nantes)
		El Maati Ouhabaz	Professeur (Université de Bordeaux I)
		Georgi Popov	Professeur (Université de Nantes)
		Didier Robert	Professeur (Université de Nantes)
		André Voros	Chercheur CEA

Directeur de thèse	:	Laurent Guillopé
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

N° E.D. : 366-366

Table des matières

Remerciements

Cette thèse est la conclusion de quatre années de travail dans un cadre privilégié : le laboratoire de mathématiques Jean Leray de l'université de Nantes. Les différents personnels de ce laboratoire l'humanisent voir même lui donnent vie. J'y ai été très bien accueilli et je les en remercie.

J'ai effectué ce travail de thèse sous la direction éclairée de Laurent Guillopé. Il a su m'accorder suffisamment de son temps précieux pour me guider et pour suivre de très près mon travail. Merci.

Merci à Alain Grigis et à Alejandro Uribe d'avoir rapporté cette thèse.

Cette thèse est aussi le fruit de quatre années de vie à Nantes. En effet, elle est aussi issue de rencontres. Notamment avec les thésards du laboratoire qui sont pour beaucoup devenus des amis. Merci à Alain, Vincent, Etienne, Antoine et Rodolphe pour avoir su tempérer les ardeurs destructrices de Francis... Merci à Arnaud, Frédérique, Alain, Fanny pour avoir partagé mon bureau et bien d'autres choses... Merci à eux et à Alexandre, Julien, Ronan, Nicolas, Simon et Simon, Emmanuel, Steeve, Raffik et Pierre pour avoir contribué à l'expansion de la taroinche (le meilleur jeu de cartes du monde au demeurant).

Plus en amont je voudrais remercier mes deux professeurs de prépa : Jean-Louis Liters et Bernard Luron. C'est dans leurs mains que j'ai découvert les vraies mathématiques. Plus généralement, merci au lycée Clémenceau de Nantes et avant lui au lycée Sainte-Ursule de Luçon et à leurs professeurs pour m'avoir appris l'essentiel de ce que je sais.

Merci à la ville de Nantes pour la qualité de vie qu'elle offre.

Merci à mes parents pour leur soutient depuis le début.

Merci à Charlotte pour avoir changé ma vie.

Introduction

Sur une variété riemannienne lisse compacte, (X, g), le spectre du laplacien est discret. Il s'agit d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers $+\infty$. Sa résolvante $R_0(z) := (\Delta - z)^{-1}$ est alors une famille méromorphe dans $\mathbb{C}$, d'opérateurs bornés sur $L^2(X)$ dont les pôles sont les valeurs propres du laplacien et leurs multiplicités sont les rangs des résidus.

Si la variété n'est pas compacte, en général, du spectre essentiel apparaît, comme par exemple pour l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou encore l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, où le spectre du laplacien est respectivement $[0, +\infty[$ et $[\frac{(n-1)^2}{4}, +\infty[$. Dans ces exemples on peut prolonger méromorphiquement les résolvantes modifiées du laplacien à travers le spectre essentiel. Pour l'espace euclidien, si la dimension est impaire, $R_0(\lambda) := (\Delta - \lambda^2)^{-1}$ d'abord définie sur $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ admet, pour tout $N > 0$, un prolongement holomorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}\lambda > -N\}$ à valeurs dans les opérateurs bornés sur des espaces L^2 à poids (avec des poids qui dépendent de N). Si la dimension est paire, on prolonge $(\Delta - e^{2\lambda})^{-1}$ de $\{\lambda \in \mathbb{C} ; 0 < \operatorname{Im}\lambda < \pi\}$ à $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \mid \operatorname{Im}(e^{\lambda}) \mid < N\}$ de manière holomorphe toujours dans des espaces L^2 à poids. Pour l'espace hyperbolique, pour tout $N > 0$, on prolonge $R_0(\lambda) := (\Delta - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ de $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}\}$ à $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2} - N\}$ dans des espaces L^2 à poids. Le prolongement est holomorphe si la dimension est impaire, et méromorphe si elle est paire avec $-\mathbb{N}$ comme ensemble de pôles. On appelle les pôles du prolongement *résonances* et on note $\operatorname{Res}(\Delta)$ leur ensemble. Ce sont les valeurs spectrales discrètes qui remplacent les valeurs propres du cas compact.

On connaît d'autres exemples où on peut prolonger la résolvante modifiée du laplacien à travers le spectre essentiel de façon méromorphe avec des résidus de rang fini (on dira *méromorphe-finie*). Le cas des variétés asymptotiquement hyperboliques a été traité par Mazzeo et Melrose ([MM87]) et complété par Guillarmou ([Gui05a]). On peut aussi citer les variétés à bouts asymptotiquement cylindriques étudiées par Melrose ([Mel93]).

On se place désormais dans ce cadre en supposant que la résolvante modifiée du laplacien libre, $R_0(\lambda) = (\Delta - f(\lambda))^{-1}$, admet un prolongement méromorphe-fini sur un domaine de $\mathbb{C}$, D^+. Pour tout $\lambda \in D^+$ dans un voisinage d'un pôle λ_0, on a le développement de Laurent suivant :

$$R_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_0)^{-i} S_i + H(\lambda),$$

avec S_i de rang fini et H holomorphe. On appelle *multiplicité* de la résonance λ_0 la dimension de l'image de S_1 et p est l'*ordre* de λ_0.

Si on perturbe le laplacien par un potentiel V et si V est suffisamment décroissant à l'infini sur X, par exemple à support compact, alors la résolvante modifiée de $\Delta+V$, $R_V(\lambda) := (\Delta+V-f(\lambda))^{-1}$, admet aussi un prolongement méromorphe-fini sur D^+. On peut alors s'intéresser aux résonances de l'opérateur $\Delta+V$ dont on note l'ensemble $\mathrm{Res}(\Delta+V)$.

Pour un tel V, suffisamment décroissant à l'infini, le spectre essentiel de $\Delta+V$ est le même que celui de Δ car V est relativement compact par rapport à Δ. On peut alors se demander comment les résonances, elles, sont modifiées. On en arrive à la question principale qui a dirigé mon travail de thèse :

Existe-t-il des potentiels V tels que $\mathrm{Res}(\boldsymbol{\Delta}+\mathbf{V}) = \mathrm{Res}(\boldsymbol{\Delta})$?

On dira de ces potentiels qu'ils sont *isorésonants*. On ne peut donc pas détecter leur présence par la seule observation de l'ensemble des résonances.

On va construire de tels potentiels isorésonants et ils seront à valeurs complexes. C'est une caractéristique importante car, par exemple, on sait que dans l'espace euclidien, $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$ et pair ou $n=3$, tout potentiel réel, non trivial, lisse et à support compact crée une infinité de résonances (cf [SB99], [Mel95], [SBZ95]).

Je me suis inspiré du travail de Christiansen dans [Chr06] et [Chr08]. Elle construit dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) euclidien des potentiels complexes isorésonants, c'est-à-dire dans ce cas : $\mathrm{Res}(\Delta+V) = \mathrm{Res}(\Delta) = \emptyset$. En fait elle se sert d'une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Même si dans cette thèse on ne travaillera que en dimension supérieure ou égale à 2, on peut citer ici le travail antérieur de Gasymov [Gas80] qui, en dimension 1, construit des potentiels complexes isospectraux qui inspireront la construction de Christiansen. Dans cette thèse, j'ai généralisé cette construction de potentiels isorésonants à d'autres variétés possédant une action isométrique de $\mathbb{S}^1$, puis j'ai utilisé d'autres symétries comme $(\mathbb{S}^1)^m$ et $SO(n)$. Sur ces variétés le laplacien libre a déjà des résonances, il y a donc plus de travail pour démontrer l'isorésonance de ces potentiels. En effet, dans l'espace euclidien, il suffit de montrer $\mathrm{Res}(\Delta+V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$ car $\mathrm{Res}(\Delta) = \emptyset$.

Décrivons la méthode de construction de ces potentiels et les résultats obtenus. Supposons que (X, g) soit munie d'une action isométrique de $\mathbb{S}^1$. Cette action induit une représentation unitaire de $\mathbb{S}^1$ sur $L^2(X)$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & U(L^2(X)) \\ e^{i\theta} & \longrightarrow & f \to (x \to f(e^{-i\theta}.x)). \end{array}$$

On peut alors décomposer $L^2(X)$ en composantes isotypiques, c'est-à-dire

$$L^2(X) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}^{\perp} L^2_j(X)},$$

où, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$L^2_j(X) := \{f \in L^2(X)\ ;\ \forall \theta \in [0, 2\pi],\ pp - x \in X,\ f(e^{-i\theta}.x) = e^{ij\theta} f(x)\},$$

est l'espace de symétrie des fonctions $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids j (la notation $pp-x \in X$ signifie : pour presque tout x appartenant à X).

Les potentiels isorésonants sont alors construits comme des sommes de fonctions $\mathbb{S}^1$ homogènes avec des poids de même signe. En effet, de telles fonctions créent un décalage sur les composantes isotypiques de $L^2(X)$: si $V \in L^\infty(X) \cap L^2_m(X)$ et $f \in L^2_j(X)$ alors $Vf \in L^2_{j+m}(X)$. Alors que le laplacien, lui, stabilise ces composantes isotypiques. Ce décalage nous permet de montrer l'inclusion $\mathrm{Res}(\Delta + V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$, d'abord pour V tronqué, puis on passe à V grâce à une caractérisation des résonances comme zéros d'un déterminant régularisé.

Au passage, on est amené à estimer, pour tout compact K, le bas du spectre du laplacien de Dirichlet défini sur les fonctions $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids j à support dans K (on notera $L^2_j(K)$). Le résultat exposé dans le chapitre 2, qui semble intéressant en lui-même, est le suivant :

Proposition 1 *Soit K une variété compacte à bord, possédant une action de $\mathbb{S}^1$ et munie d'une métrique g telle que $\mathbb{S}^1$ agit par isométries sur (K, g) et g peut s'écrire comme une métrique produit dans un voisinage du bord de K. Alors, il existe des constantes strictement positives, $C_1(K)$ et $C_2(K)$, telles que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$C_1 j^2 \leq \mathrm{Min\ Spec}\ \Delta_{L^2_j(K)} \leq C_2(1 + j^2).$$

Pour l'autre inclusion, $\mathrm{Res}(\Delta) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$, j'ai utilisé la théorie des perturbations des résonances développée par Agmon dans [Agm98] et que je rappelle en annexe. Elle permet de voir les résonances comme des valeurs propres d'opérateurs auxiliaires et d'utiliser la théorie de Kato pour étudier leurs perturbations.

On obtient finalement le résultat suivant que volontairement on n'énonce pas ici dans toute sa généralité :

Théorème 1 *Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ou l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, on considère le potentiel*

$$V = \sum_{m=1}^{M} V_m,$$

où les $V_m \in L^\infty(X)$ sont à support compact et $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids m.

Alors, sur $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ et les multiplicités coïncident.

Ce résultat se généralise à des variétés riemanniennes X qui possèdent une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ et telles que la résolvante modifiée du laplacien libre admet un prolongement méromorphe-fini sur un domaine D^+. Il faut aussi qu'on puisse inclure tout compact de X dans un compact $\widetilde{K}$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 1. On peut prendre pour V une somme infinie de potentiels $\mathbb{S}^1$ homogènes avec des poids de même signe en utilisant des déterminants régularisés dans des espaces de Schatten. On peut aussi prendre V non plus à support compact mais suffisamment décroissant à l'infini pour avoir le prolongement méromorphe-fini de la résolvante de $\Delta + V$ sur D^+. On renvoie au théorème 4 du chapitre 3 pour l'énoncé dans le cas général.

Remarque 1 *Au lieu de perturber le laplacien libre on peut perturber* $\Delta+V_0$ *avec* V_0 *un potentiel invariant sous l'action de* $\mathbb{S}^1$. *Le fait que* V_0 *soit* $\mathbb{S}^1$ *invariant assure que, comme le laplacien, il respectera la décomposition de* $L^2(X)$ *en composantes isotypiques. En supposant de plus que* V_0 *est réel et qu'il est à support compact, on peut obtenir que* $\mathrm{Res}(\Delta + V_0 + V) = \mathrm{Res}(\Delta + V_0)$. *On peut imaginer perturber d'autres opérateurs qui respectent la décomposition de* $L^2(X)$ *en composantes isotypiques.*

La construction de potentiels isorésonants se servant d'une action de $(\mathbb{S}^1)^m$ est essentiellement la même que dans le cas de $\mathbb{S}^1$. Par contre, si on regarde l'action de $SO(n)$ ($n \geq 3$), comme ce n'est pas un groupe commutatif, on n'a pas de description simple des espaces de symétrie. On suppose alors qu'on peut écrire

$$L^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k,$$

où $H^k = Ker(\Delta_{S^{n-1}} - k(k+n-2))$, $k \in \mathbb{N}$, est l'espace propre du laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. Comme dans le cas $\mathbb{S}^1$, on va construire des V qui induisent un décalage dans cette décomposition de $L^2(X)$. Cette fois V est une somme de vecteurs de poids maximaux des représentations H^k de la complexification de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_n$. On s'est inspiré ici de la construction de potentiels isospectraux par Guillemin et Uribe dans [GU83]. La particularité du cas $SO(n)$ est qu'on n'a plus besoin de la proposition 1, ce qui simplifie notoirement la preuve du résultat d'isorésonance. On détaille et compare ces trois constructions dans le chapitre 3.

Ces potentiels conservent l'ensemble des résonances du laplacien libre et leur multiplicité, on peut se demander si, en ajoutant de l'information, on ne pourrait pas les détecter. Sur cette voie, je montre que sur $\mathbb{H}^2$, il existe des potentiels parmi la famille de potentiels isorésonants construits qui modifient l'ordre des résonances. On rappelle que, sur $\mathbb{H}^2$, les résonances du laplacien sont les entiers négatifs ou nuls et que ce sont des résonances d'ordre 1. On prend comme modèle pour l'espace hyperbolique $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ avec les coordonnées (r, θ) et la métrique $g = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{sh}(r)^2 \mathrm{d}\theta^2$, alors on a

Proposition 2 *Sur l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^2$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, *il existe un potentiel* $V \in \mathcal{F} := \{V_m(r)e^{im\theta}; m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, V_m \in L^\infty_c(\mathbb{R}^+)\}$ *(*V *est isorésonant d'après le théorème 1) tel que* $-k$ *est une résonance de* $\Delta + V$ *d'ordre strictement plus grand que* 1.

On peut donc détecter ces potentiels. Les relations entre potentiel et ordre des résonances restent pour moi une piste de recherche.

Dans le chapitre 4, on construit des potentiels isorésonants sur la caténoïde. La caténoïde est la surface X difféomorphe au cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et munie de la métrique $g = \mathrm{d}r^2 + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\alpha^2$ avec $(r, e^{i\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et $a \in \mathbb{R}$. Elle possède bien sûr une action de $\mathbb{S}^1$ et on peut encore prolonger la résolvante du laplacien libre à travers son spectre essentiel et donc parler de résonances. Par contre, la théorie des perturbations des résonances d'Agmon ne s'applique plus. Je construis quand même des potentiels isorésonants sur la caténoïde en utilisant la distorsion analytique développée, dans ce cadre, par Wunsch et Zworski dans [WZ00]. Elle permet, comme la théorie d'Agmon, de ramener le problème des résonances à un problème de valeurs propres.

Dans le chapitre 5, on développe la théorie de la diffusion sur des variétés asymptotiquement hyperboliques avec des potentiels complexes s'annulant à l'infini. Il est naturel de s'intéresser à la théorie de la diffusion car les pôles de l'opérateur de diffusion sont intimement liés aux pôles de la résolvante (voir [BP02] et [Gui05b]). On note S_V l'opérateur de diffusion associé à $\Delta + V$ et on définit la multiplicité d'un pôle $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ de S_V par

$$\nu_V(\lambda_0) := \mathrm{Tr}\big(\mathrm{res}_{\lambda_0}(S_V(\lambda)^{-1}\partial_\lambda S_V(\lambda))\big),$$

où res_{λ_0} désigne le résidu en λ_0. Alors on montre que nos potentiels isorésonants V construits dans le reste de cette thèse vérifient

Théorème 2 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, on a*

$$\det(S_V(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}) = 1 \quad \textit{et} \quad \nu_V(\lambda) = \nu_0(\lambda).$$

Donc S_V et S_0 ont les mêmes pôles avec les mêmes multiplicités.

Pour conclure, dans la continuation de cette thèse, il faudrait approfondir le lien entre mes potentiels et l'ordre des résonances. Il serait aussi intéressant de chercher des potentiels isorésonants **réels**. De manière plus générale, je ne pense pas qu'on ait exploité tout ce que peut nous apprendre sur les résonances la connaissance de symétries dans l'espace ambiant.

Chapitre 1

Résonances et symétries

1.1 Prolongements de résolvantes libres

1.1.1 Cadre général

On considère une variété riemannienne (X, g) connexe, non compacte, de dimension $n \geq 2$. Sur X, on s'intéresse au laplacien agissant sur les fonctions qu'on notera Δ. Il est défini en coordonnées par

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j),$$

où $\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})}$ et (g^{ij}) est la matrice inverse de celle de la métrique : (g_{ij}). Il s'agit d'un opérateur autoadjoint sur le domaine $H^2(X)$ et positif dont le spectre est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$, la résolvante du laplacien libre $(\Delta - z)^{-1}$ est un opérateur borné sur $L^2(X)$ à valeurs dans $H^2(X)$. Cette résolvante est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Dans toute la suite on supposera que, en modifiant les espaces de départ et d'arrivée, elle admet un prolongement méromorphe à travers $\mathbb{R}^+$.

Définissons d'abord ce qu'on entend par méromorphe. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}$ un espace de Banach, alors une famille $P(z), z \in U$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ est dite méromorphe si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage V_{z_0} de z_0, un entier $p > 0$ et des $(S_i)_{i=1,\ldots,p}$ dans $\mathcal{H}$ tels que, pour tout $z \in V_{z_0} \setminus \{z_0\}$, on ait le développement de Laurent suivant

$$P(z) = \sum_{i=1}^{p} S_i (z - z_0)^{-i} + H(z),$$

où H est holomorphe sur V_{z_0} à valeurs dans $\mathcal{H}$. En fait P est holomorphe sur $U \setminus S$ avec S l'ensemble discret des pôles de P. Si $\mathcal{H}$ est l'espace des applications linéaires continues entre deux Banach B_0, B_1, qu'on note $\mathcal{L}(B_0, B_1)$, alors on dira que $P(z)$ est méromorphe-finie sur U si tous les S_i sont de rang fini.

Il peut être utile de changer le paramètre spectral pour définir le prolongement méromorphe. Plus précisement, on considère un revêtement $f : \Sigma \to \Omega$ au dessus de Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et un domaine non borné $D \subset \Sigma$ tel que $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On considère alors $R_0(\lambda) := (\Delta - f(\lambda))^{-1}$ qui, dans un premier temps, est défini et holomorphe sur D à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(X)) := \mathcal{L}(L^2(X), L^2(X))$. Soient B_0 et B_1 deux espaces de Banach tels que

$$B_0 \overset{J_0}{\hookrightarrow} L^2(X) \overset{J}{\hookrightarrow} B_1,$$

où J_0 et J sont des injections continues et $J_0(B_0)$ est dense dans $L^2(X)$ et $J(L^2(X))$ est dense dans B_1. On note, pour $\lambda \in D$,

$$\widetilde{R}_0(\lambda) = JR_0(\lambda)J_0.$$

$\widetilde{R}_0$ est holomorphe dans D à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$.

On va s'intéresser aux cas où l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse A : $\widetilde{R}_0$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine D^+ de Σ.

1.1.2 Exemples

Donnons quelques premiers exemples de prolongements de la résolvante du laplacien libre qui nous intéresseront tout au long de cette thèse.

L'espace euclidien

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne. Le spectre du laplacien est $\mathbb{R}^+$ et est essentiel. L'étude du prolongement dépend de la parité de la dimension n.

- Si n est impair ($n \geq 3$), alors on prend $\Sigma = \mathbb{C}$ et $R_0(\lambda) := (\Delta - \lambda^2)^{-1}$ est d'abord définie sur $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Pour tout $N > 0$, elle admet un prolongement, en fait, holomorphe dans $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mid \mathrm{Im}\lambda \mid < N\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(e^{-N<z>}L^2(\mathbb{R}^n), e^{N<z>}L^2(\mathbb{R}^n))$ où $z \in \mathbb{R}^n$ et $<z>= (1+ \mid z \mid^2)^{\frac{1}{2}}$. (cf [Mel95] et [SBZ95])
- Si n est pair, alors on prend pour Σ le revêtement logarithmique de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et $R_0(\lambda) := (\Delta - e^{2\lambda})^{-1}$. Elle est d'abord définie dans $D = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ 0 < \mathrm{Im}\lambda < \pi\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. Pour tout $N > 0$, elle admet un prolongement holomorphe sur $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \mid \mathrm{Im}(e^\lambda) \mid < N\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(e^{-N<z>}L^2(\mathbb{R}^n), e^{N<z>}L^2(\mathbb{R}^n))$. (cf [Mel95])

Variétés asymptotiquement hyperboliques

Soit $\overline{X} = X \cup \partial\overline{X}$ une variété compacte lisse à bord de dimension n et ρ_0 une fonction définissant son bord, c'est-à-dire une fonction lisse sur $\overline{X}$ vérifiant

$$\rho_0 \geq 0, \ \ \partial\overline{X} = \{m \in \overline{X} \ ; \ \rho_0(m) = 0\}, \ \ d\rho_0 \mid_{\partial\overline{X}} \neq 0.$$

On dit qu'une métrique g sur X est asymptotiquement hyperbolique si $\rho_0^2 g$ se prolonge en une métrique lisse sur $\overline{X}$ et si $\mid \mathrm{d}\rho_0 \mid_{\rho_0^2 g}= 1$ sur $\partial\overline{X}$. Cette dernière condition assure que la courbure sectionnelle de g converge vers -1 au bord et elle implique qu'il existe une fonction ρ définissant le bord, un voisinage collier du bord associé à ρ, $U_\rho := [0,\epsilon) \times \partial\overline{X}$, et une famille lisse $h(\rho)$, $\rho \in [0,\epsilon)$ de métriques sur $\partial\overline{X}$ tels que

$$g = \frac{\mathrm{d}\rho^2 + h(\rho)}{\rho^2} \quad \text{sur } U_\rho. \tag{1.1}$$

Par exemple, l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ et ses quotients par des groupes convexes co-compacts sont asymptotiquement hyperboliques.

Sur une variété asymptotiquement hyperbolique, le spectre du laplacien agissant sur les fonctions est constitué du spectre essentiel $\sigma_{ess}(\Delta) = [\frac{(n-1)^2}{4}, +\infty)$ et d'un nombre fini de valeurs propres formant le spectre discret $\sigma_d(\Delta) \subset (0, \frac{(n-1)^2}{4})$. En prenant $\Sigma = \mathbb{C}$ et, comme nouveau paramètre spectral $\lambda(n-1-\lambda)$, la résolvante du laplacien libre $R_0(\lambda) := (\Delta - \lambda(n-1-\lambda))^{-1}$ est une famille méromorphe-finie sur $D = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n-1}{2}\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(X))$ avec des pôles aux λ tels que $\lambda(n-1-\lambda) \in \sigma_d(\Delta)$.

Mazzeo et Melrose ([MM87]) puis Guillarmou ([Gui05a]) ont montré que R_0 a un prolongement méromorphe-fini dans $\mathbb{C}\setminus(\frac{n}{2}-\mathbb{N})$. Elle admet même un prolongement méromorphe-fini dans $\mathbb{C}$ tout entier si et seulement si la métrique g est paire. La métrique g est dite paire si la famille $h(\rho)$ définie en (1.1) a un développement de Taylor en $\rho = 0$ qui ne contient que des puissances paires de ρ (cette notion ne dépend pas du choix de ρ). Plus précisement, pour tout $N \geq 0$, $R_0(\lambda)$ a un prolongement méromorphe-fini sur $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n-1}{2} - N\}$ si g est paire, et sur $D_N^+ \setminus (\frac{n}{2} - \mathbb{N})$ sinon, à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Variétés à bouts asymptotiquement cylindriques

Soit, comme dans l'exemple précédent, $\overline{X} = X \cup \partial\overline{X}$ une variété compacte lisse à bord de dimension n. On dit qu'une métrique g sur X est à bouts asymptotiquement cylindriques s'il existe une fonction ρ définissant le bord, un voisinage collier du bord associé à ρ, $U_\rho := [0,\epsilon) \times \partial\overline{X}$, et une famille lisse $h(\rho)$, $\rho \in [0,\epsilon)$ de métriques sur $\partial\overline{X}$ tels que

$$g = \frac{\mathrm{d}\rho^2}{\rho^2} + h(\rho) \quad \text{sur } U_\rho. \tag{1.2}$$

Melrose appelle ce type de métrique une "exact b-metric" ([Mel93], [Mel95]). Soit $\Delta_{\partial\overline{X}}$ le laplacien sur la variété compacte sans bord $\partial\overline{X}$ et $0 = \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \ldots$ son spectre de valeurs propres sans multiplicité. On peut alors décrire le spectre du laplacien sur X, Δ. Pour tout $j > 0$, $[\sigma_j, \sigma_{j+1})$ est du spectre continu de multiplicité la somme des multiplicités de $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_j\}$ en tant que valeurs propres de $\Delta_{\partial\overline{X}}$ et il peut éventuellement contenir des valeurs propres plongées de multiplicité finie.

Melrose, dans [Mel93], prolonge la résolvante du laplacien libre sur la surface de Riemann Σ qui est telle que toutes les fonctions $r_j(\lambda) := (\lambda - \sigma_j^2)^{\frac{1}{2}}$

y soient holomorphes. Cette surface est ramifiée aux points $\lambda = \sigma_j^2$. $R_0(\lambda) = (\Delta - \lambda)^{-1}$ est d'abord définie sur $D = \{\lambda \in \Sigma \,;\, \forall j \ \mathrm{Im}(r_j(\lambda)) > 0\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(X), L^2(X))$ et, pour tout $N \geq 0$, elle a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

1.1.3 Cadre commun

Dans le but de traiter tous ces exemples avec une unique notation, on reformule l'hypothèse A. Pour $N > 0$ et ρ une fonction définissant le bord de notre variété X, sauf dans le cas euclidien où on prend $\rho(z) = e^{-<z>}$, on pose

Hypothèse $A_{N,\rho}$: $\widetilde{R}_0$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine non borné D_N^+ de Σ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Remarque 2 *Pour que l'hypothèse soit pertinente il faut que $f(D_N^+)$ intersecte le spectre essentiel de Δ.*

Remarque 3 *Dans les exemples, la taille de D_N^+ est croissante relativement à N.*

Remarque 4 *On traitera un autre exemple de variété sur laquelle on a un prolongement méromorphe-fini de la résolvante du laplacien libre : la caténoïde. Mais ne rentrant pas dans ce cadre général, on lui accordera un chapitre à part.*

1.2 Prolongements de résolvantes avec potentiels

On veut ajouter un potentiel V, a priori complexe, au laplacien en ayant aussi un prolongement de la résolvante $(\Delta + V - z)^{-1}$. On introduit donc une hypothèse sur V pour que, R_0 ait un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+, et que $(\Delta + V - z)^{-1}$, après changement de paramètre spectral, ait aussi un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+.

Hypothèse $B_{N,\rho}$: $\widetilde{R}_V(\lambda) := J(\Delta + V - f(\lambda))^{-1} J_0$ admet un prolongement méromorphe-fini sur D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$ et $\rho^{-2N} V$ est borné sur X.

L'hypothèse $\rho^{-2N} V$ borné est là pour nous permettre d'appliquer la théorie des perturbations d'Agmon (voir l'annexe), et elle peut suffire à prolonger $\widetilde{R}_{tV}$ sur tout compact de D_N^+ pour $t \in \mathbb{C}$ assez proche de 0 :

Proposition 3 *Si l'hypothèse $A_{N,\rho}$ est réalisée sur un domaine D_N^+ et si $\rho^{-2N} V$ est borné sur X, alors, pour tout domaine compact $\widetilde{D}_N^+$ inclus dans D_N^+, il existe Ω_0, un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, tel que, pour tout $t \in \Omega_0$, $\widetilde{R}_{tV}(\lambda) := J(\Delta + tV - f(\lambda))^{-1} J_0$ admet un prolongement méromorphe-fini sur $\widetilde{D}_N^+$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.*

Remarque 5 *Alors, avec tV, $t \in \Omega_0$, les hypothèses $A_{N,\rho}$ et $B_{N,\rho}$ sont toutes les deux vérifiées sur $\widetilde{D}_N^+$.*

Preuve : on fait appel à la théorie des perturbations d'Agmon ([Agm98]) dont on rappelle les résultats dans l'annexe. On considère donc, pour $t \in \mathbb{C}$, la famille des perturbations du laplacien

$$\mathcal{P}(t) = \Delta + tV.$$

Avant de pouvoir appliquer la théorie d'Agmon il faut en vérifier toutes les hypothèses (cf hypothèses (α), (β), (γ), (δ) de l'annexe) ce qui est fait dans la dernière partie de l'annexe avec $B_0 = \rho^N L^2(X)$ et $B_1 = \rho^{-N} L^2(X)$. Le fait que $\rho^{-2N}V$ soit borné sur X sert notamment à vérifier l'hypothèse (δ) qui assure que la famille $\{\mathcal{P}(t)\}_{t\in\mathbb{C}}$ est holomorphe de type A au sens de Kato.

On considère alors un domaine compact $\widetilde{D}_N^+$ inclus dans D_N^+. Agmon se ramène alors à la théorie des perturbations des valeurs propres de Kato à l'intérieur de $\widetilde{D}_N^+$, ([Kat66]), pour prolonger $\widetilde{R}_{tV}(\lambda)$ de manière méromorphe-finie pour $\lambda \in \widetilde{D}_N^+$ et t dans un voisinage Ω_0 de 0 dans $\mathbb{C}$. C'est exactement la proposition 12 de l'annexe. □

On peut en dire un peu plus dans les deux premiers exemples cités précédemment :

- Dans l'espace euclidien, si V est un potentiel à décroissance super-exponentielle, c'est-à-dire que, pour tout M, il existe une constante C_M telle que $|V(x)| \leq C_M e^{-M|x|}$, alors les hypothèses $A_{N,\rho}$ et $B_{N,\rho}$ sont toutes les deux vérifiées sur $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Im}\lambda| < N\}$ (respectivement $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Im}(e^\lambda)| < N\}$ si la dimension est paire) et ce pour tout N.
- Dans les espaces asymptotiquement hyperboliques, si V est lisse sur $\overline{X}$ et s'annule à tous les ordres en ρ au voisinage du bord alors $A_{N,\rho}$ et $B_{N,\rho}$ sont toutes les deux vérifiées sur $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n-1}{2} - N\}$ (en ôtant $\frac{n}{2} - \mathbb{N}$ si la métrique n'est pas paire) et ce pour tout N.

1.3 Résonances et potentiels isorésonants

Supposons que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ soit vérifiée. Alors $\widetilde{R}_0$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine D_N^+ de Σ. Si $\lambda_0 \in D_N^+$ est un pôle de $\widetilde{R}_0$, alors on rappelle que, pour tout λ dans un voisinage de λ_0, on a le développement de Laurent suivant

$$\widetilde{R}_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_0)^{-i} S_i + H(\lambda),$$

avec $S_i \in \mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$ de rang fini et H est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$.

Définition 1 *On appelle **résonances** du laplacien dans D_N^+ les pôles du prolongement de $\widetilde{R}_0$ dans D_N^+ et on note $\mathrm{Res}(\Delta)$ l'ensemble de ces pôles. Dans le* *développement de Laurent correspondant au voisinage de $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta)$, avec les notations précédentes, p est* ***l'ordre*** *de λ_0,* ***l'espace résonant*** *est l'image de S_1 et sa dimension est la* ***multiplicité*** *de λ_0.*

Remarque 6 *Agmon a montré dans [Agm98] que les notions de résonances, d'ordre et de multiplicité ne dépendent pas de la fonction ρ choisie.*

Si l'hypothèse $B_{N,\rho}$ est aussi vérifiée dans D_N^+ pour un certain potentiel V on peut alors définir de la même façon les résonances de $\Delta + V$ comme étant les pôles de $\widetilde{R}_V$ dans D_N^+ et on note $\mathrm{Res}(\Delta + V)$ leur ensemble. On définit aussi l'ordre et la multiplicité d'une telle résonance.

Définition 2 *On dit qu'un potentiel V tel que les hypothèses $A_{N,\rho}$ et $B_{N,\rho}$ soient vérifiées sur D_N^+ est* ***isorésonant*** *si $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ sur D_N^+ et si les multiplicités sont les mêmes.*

1.4 Représentations et espaces de symétrie

Pour construire des potentiels isorésonants on va utiliser certaines symétries. Ces symétries sont décrites par des groupes et par les représentations linéaires induites. On commence par rappeler un peu de vocabulaire des représentations et quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.

Soit G un groupe topologique compact. Une représentation μ de G sur un espace vectoriel E est la donnée d'un morphisme de groupe de G dans $GL(E)$. La représentation est dite finie si E est de dimension finie et on appelle degré de μ cette dimension. Si E est muni d'une structure d'espace de Hilbert, la représentation μ est dite unitaire si elle est à valeurs dans les opérateurs unitaires de E. Enfin, elle est dite fortement continue si pour tout x dans E l'application $g \to \mu(g)(x)$ est continue.

- Un sous espace vectoriel F de E est dit invariant par μ si
$$\forall g \in G,\ \ \mu(g)F \subset F.$$
Une représentation est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces invariants fermés sont $\{0\}$ et E.
- Deux représentations (μ_1, E_1) et (μ_2, E_2) sont **isomorphes** s'il existe γ isomorphisme linéaire de E_1 dans E_2 tel que $\gamma \circ \mu_1 = \mu_2 \circ \gamma$.
- A toute représentation finie μ on associe un **caractère** $\chi_\mu : G \to \mathbb{C}$ défini par
$$\chi_\mu(g) = \mathrm{Tr}(\mu(g)),\ \ \forall g \in G.$$
Deux représentations finies sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère. De plus toute représentation finie se décompose en une somme directe finie de représentations irréductibles avec éventuellement des

répétitions ([Ser71]). D'où l'importance de l'ensemble des caractères des représentations finies irréductibles de G qu'on notera $\widehat{\mathbf{G}}$. Comme G est compact, $\widehat{G}$ est dénombrable ([Sim96]) et on peut donc parler de la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des caractères irréductibles de G. On notera $\mathbf{d}_\chi$ le degré de la représentation irréductible correspondant au caractère χ.

G est muni de sa mesure de Haar qu'on note $\mathrm{d}\mathbf{g}$. Une fonction f sur G est dite **centrale** si elle est constante presque partout sur les classes de conjugaison c'est-à-dire

$$\forall h \in G,\ pp - g \in G,\ f(hgh^{-1}) = f(g).$$

On note $\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_\sharp(\mathbf{G})$ l'ensemble des fonctions centrales de $L^2(G)$. Alors on a :

$$(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2_\sharp(G),$$

c'est une conséquence du théorème de Peter-Weyl ; on renvoie à [Sim96] p.158.

- On a aussi, dans [Sim96] p.162, une preuve de

  Proposition 4 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $\mu : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une application fortement continue de G dans les opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H} = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{H}_i$ (somme hilbertienne) où les $\mathcal{H}_i$ sont des représentations irréductibles finies de G.*

  Chacun des $\mathcal{H}_i$ correspond à un caractère. On regroupe alors tous les $\mathcal{H}_i$ correspondant au même caractère χ (il peut y en avoir une infinité) pour former le **sous-espace de symétrie** $\mathcal{H}_\chi$.

Soit X notre variété riemannienne de dimension n, non compacte, on suppose qu'elle admet une action continue et isométrique d'un groupe compact G. On note $g.x,\ g \in G,\ x \in X$, cette action. On s'intéresse alors plus particulièrement à la représentation μ de G sur $L^2(X)$ donnée par

$$(\mu(g)f)(x) := f(g^{-1}.x), \quad \forall f \in L^2(X),\ \forall x \in X.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $g.f$ au lieu de $\mu(g)f$.

Proposition 5 *La représentation μ de G sur $L^2(X)$ précédente est unitaire et fortement continue.*

Preuve : soit $g \in G$, $\mu(g)$ est un isomorphisme de $L^2(X)$ avec $(\mu(g))^{-1} = \mu(g^{-1})$. $\mu(g)$ est une isométrie car G agit par isométries sur X. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^2(X)$, pour montrer que μ est fortement continue, il suffit de vérifier que, si $f \in C^\infty_{comp}(X)$, alors $\mu(g)f$ tend vers f quand g tend vers l'unité de G. Or

$$\| \mu(g)f - f \|^2_{L^2(X)} = \int_X | f(g^{-1}.x) - f(x) |^2 \,\mathrm{d}x,$$

et l'ensemble $K := \{g.x \; ; \; x \in \mathrm{supp}(f), g \in G\}$ est compact. Donc en utilisant $| f(g^{-1}.x) - f(x)|^2 \leq 4 \parallel f \parallel_\infty^2 \mathbb{1}_K$, on a le résultat par convergence dominée. $\square$

On peut donc appliquer la proposition 4 à cette représentation et décomposer $L^2(X)$ selon les sous-espaces de symétrie correspondant à cette action de G sur X.

Proposition 6 *Soit G un groupe compact agissant sur X par isométries. Alors*

$$L^2(X) = \overline{\bigoplus_{\chi \in \widehat{G}}^{\perp} L^2_\chi(X)} \qquad \text{(somme hilbertienne).}$$

La restriction de μ à $L^2_\chi(X)$ est une somme, éventuellement infinie, de représentations irréductibles finies de même caractère χ.

De plus les projecteurs orthogonaux P_χ de $L^2(X)$ sur $L^2_\chi(X)$ correspondant à cette décomposition sont donnés par

$$P_\chi = \mathrm{d}_\chi^{-1} \int_G \overline{\chi(g)} \mu(g) \mathrm{d}g.$$

On dit qu'on a décomposé $(\mu, L^2(X))$ en **composantes isotypiques**.

Si G est un groupe commutatif, ses représentations irréductibles sont de degré 1 ([Ser71]). Dans ce cas, on peut décrire plus explicitement les espaces de symétrie.

Proposition 7 *Soit χ un caractère de G de degré 1. Alors*

$$L^2_\chi(X) = \{f \in L^2(X) \; ; \; \forall g \in G, \; pp - x \in X, \; f(g^{-1}.x) = \chi(g) f(x)\}.$$

Preuve : pour obtenir l'inclusion "$\supset$" il suffit de remarquer que $\int_G |\chi(g)|^2 \; \mathrm{d}g = 1$ lorsque χ est le caractère d'une représentation irréductible et on a donc $P_\chi f = f$. Ensuite, si $P_\chi f = f$, alors $pp - x \in X, f(x) = \int_G \overline{\chi(g)} f(g^{-1}.x) \mathrm{d}g$. Donc, pour $g_0 \in G$ et pour presque tout $x \in X$, on a

$$f(g_0^{-1}.x) = \int_G \overline{\chi(g)} f((g_0 g)^{-1}.x) \mathrm{d}g = \int_G \overline{\chi(g_0^{-1} g)} f(g^{-1}.x) \mathrm{d}g.$$

De plus, comme χ est de degré 1, il est multiplicatif et on a aussi $\overline{\chi(g_0^{-1})} = \chi(g_0)$. D'où

$$f(g_0^{-1}.x) = \chi(g_0) f(x). \; \square$$

Comme l'action de G est supposée isométrique, le laplacien respecte cette décomposition de $L^2(X)$ en composantes isotypiques.

Lemme 1 *Soit X une variété riemannienne sur laquelle agit de manière isométrique un groupe compact G. Alors, pour tout $\chi \in \widehat{G}$,*

$$\Delta : L^2_\chi(X) \cap H^2(X) \to L^2_\chi(X).$$

Preuve : Soit $f \in L^2_\chi(X) \cap H^2(X)$, alors, comme l'action de G est isométrique on a $\Delta(\mu(g)f) = \mu(g)(\Delta f)$ pour tout $g \in G$. On a donc

$$\begin{aligned} P_\chi(\Delta f) &= \mathrm{d}_\chi^{-1} \int_G \overline{\chi(g)} \mu(g)(\Delta f) \mathrm{d}g = \mathrm{d}_\chi^{-1} \int_G \overline{\chi(g)} \Delta(\mu(g) f) \mathrm{d}g \\ &= \Delta(\mathrm{d}_\chi^{-1} \int_G \overline{\chi(g)} \mu(g) f \mathrm{d}g) = \Delta f. \ \square \end{aligned}$$

1.5 Actions de $\mathbb{S}^1$ et de $(\mathbb{S}^1)^m$

Les premiers exemples de symétries qui nous intéressent sont les symétries circulaires. On suppose que X admet une action isométrique de $\mathbb{S}^1$. Commençons par déterminer les caractères de $\mathbb{S}^1$.

Lemme 2 *La suite des caractères irréductibles de $\mathbb{S}^1$ est donnée par $(\chi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ avec*

$$\chi_j(\theta) = e^{ij\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Preuve : Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mu_j : \theta \to (z \to e^{ij\theta} z)$ est une représentation de degré 1 sur $\mathbb{C}$ et donc irréductible. Or, $L^2_\sharp(\mathbb{S}^1) = L^2(\mathbb{S}^1)$, et comme $(e^{ij\theta})_{j\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^1)$, on a tous les caractères de $\mathbb{S}^1$. $\square$

On peut appliquer les propositions 6 et 7 qui décomposent $L^2(X)$ en composantes isotypiques. On a

$$L^2(X) = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}^{\perp} L^2_j(X)},$$

avec, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$L^2_j(X) = \{f \in L^2(X) \ ; \ \forall\theta \in [0, 2\pi], \ pp - x \in X, \ f(e^{-i\theta}.x) = e^{ij\theta} f(x)\},$$

et les projecteurs associés

$$P_j f \ (x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} f(e^{-i\theta}.x) \mathrm{d}\theta.$$

On dira aussi qu'une fonction f est $\mathbb{S}^1$ **homogène de poids j** si elle vérifie juste :

$$\forall\theta \in [0, 2\pi], \ pp - x \in X, \ f(e^{-i\theta}.x) = e^{ij\theta} f(x),$$

sans être forcément L^2.

La construction de mes potentiels isorésonants est basée sur l'idée très simple suivante,

Lemme 3 *S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $V \in L^\infty(X)$ soit $\mathbb{S}^1$ homogène de poids m, alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V : L^2_j(X) \to L^2_{j+m}(X)$ en tant qu'opérateur de multiplication.*

Preuve : soit $f \in L^2_j(X)$, alors pour tout $x \in X$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$(e^{i\theta}.Vf)(x) = V(e^{-i\theta}.x)f(e^{-i\theta}.x) = e^{im\theta}V(x)e^{ij\theta}f(x) = e^{i(j+m)\theta}(Vf)(x),$$

donc $Vf \in L^2_{j+m}(X)$. $\square$

Un V $\mathbb{S}^1$ homogène de poids m avec $m \neq 0$, opère donc un décalage parmi les composantes isotypiques de $L^2(X)$ alors que le laplacien lui les stabilise d'après le lemme 1. Si on imagine l'opérateur $\Delta + V$ comme une matrice infinie décomposée par blocs selon les composantes isotypiques, on voit alors que la contribution de V se fait uniquement sur une surdiagonale stricte et ne modifiera pas le spectre du laplacien libre. C'est l'idée qu'on suivra pour construire nos potentiels isorésonants.

Dans la suite, on comparera les potentiels isorésonants trouvés en utilisant une action de $\mathbb{S}^1$ avec ceux construits grâce à une action de $(\mathbb{S}^1)^m$. Pour cela, précisons les choses concernant les représentations de $(\mathbb{S}^1)^m$. On note quand il n'y a pas d'ambiguité $\underline{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$.

Lemme 4 *Les caractères irréductibles de $(\mathbb{S}^1)^m$ sont donnés par $(\chi_{\underline{k}})_{(\underline{k})\in\mathbb{Z}^m}$ avec*

$$\chi_{k_1,\dots,k_m}(\theta_1, \dots, \theta_m) = e^{ik_1\theta_1} \dots e^{ik_m\theta_m}, \quad (\theta_1, \dots, \theta_m) \in [0, 2\pi]^m.$$

Les sous-espaces de symétrie de $L^2(X)$ correspondant sont, pour $\underline{k} \in \mathbb{Z}^m$, les

$$\begin{aligned} L^2_{\underline{k}}(X) = \{f \in L^2(X) \ ; \ \forall(\theta_1, \dots, \theta_m) \in [0, 2\pi]^m, \ pp - x \in X, \\ f((e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_m}).x) = e^{ik_1\theta_1} \dots e^{ik_m\theta_m} f(x)\}. \end{aligned}$$

*On dira que f est $(\mathbb{S}^1)^{\mathbf{m}}$ **homogène de poids** $(\mathbf{k_1}, \dots, \mathbf{k_m})$ si elle vérifie :*

$$\forall(\theta_1, \dots, \theta_m) \in [0, 2\pi]^m, \ pp{-}x \in X, \ f((e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_m}).x) = e^{ik_1\theta_1} \dots e^{ik_m\theta_m} f(x).$$

Si $V \in L^\infty(X)$ est $(\mathbb{S}^1)^m$ homogène de poids $\underline{p} := (p_1, \dots, p_m)$, alors il induit par multiplication le décalage suivant

$$V : L^2_{\underline{k}}(X) \to L^2_{\underline{k}+\underline{p}}(X).$$

Preuve : il suffit d'utiliser les mêmes arguments que dans le cas de $\mathbb{S}^1$.

1.6 Actions de $SO(n)$

1.6.1 Hypothèse supplémentaire pour l'action de $SO(n)$

Cette fois on considère une action isométrique de $SO(n)$ sur notre variété riemannienne X de dimension $n \geq 3$. Comme $SO(n)$ n'est pas commutatif et qu'il a des représentations irréductibles de degré strictement supérieur à 1, on ne peut pas appliquer la proposition 7 et avoir une description simple des espaces de symétrie. On ajoute une hypothèse pour pouvoir se servir d'un décalage afin de construire des potentiels isorésonants.

Hypothèse C : l'action isométrique de $SO(n)$ sur (X,g) admet un point fixe O tel qu'en ce point les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme de $X \setminus \{O\}$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Une conséquence de cette hypothèse est que, dans ces coordonnées polaires, la métrique g prend la forme

$$\mathrm{d}r^2 + f(r)\mathrm{d}\omega^2, \quad (r,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1},$$

où $\mathrm{d}\omega^2$ est la métrique sur $\mathbb{S}^{n-1}$ issue de la métrique euclidienne à courbure constante $+1$ sur $\mathbb{R}^n$. Si, par exemple, $f(r) = r^2$ alors on retrouve l'espace euclidien. Si $f(r) = \mathrm{sh}(r)^2$, on a l'espace hyperbolique. Si f est indépendante de r en dehors d'un compact, alors on a une variété à bouts cylindriques de section $\mathbb{S}^{n-1}$.

Si l'hypothèse C est vérifiée, alors on a

$$L^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k,$$

où les $H^k := \mathrm{Ker}\,(\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} - k(k+n-2))$, $k \in \mathbb{N}$, sont les espaces propres du laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. On appelle souvent ces fonctions propres de $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ les **harmoniques sphériques**.

On remarque que la représentation μ de $SO(n)$ sur $L^2(X) \simeq L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ n'agit en fait que sur $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ c'est-à-dire que sur les H^k. De plus la restriction de μ à chaque H^k est en fait irréductible (cf [BGM71]). Le décalage dont on se servira pour nos potentiels isorésonants se fera sur ces harmoniques sphériques.

Remarque 7 *Pour $n = 3$ les caractères des représentations irréductibles de $SO(3)$ sont les*

$$\chi_k(\theta) = \sum_{j=-k}^{k} e^{ij\theta} = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}, \quad \theta \in [0,2\pi],\ k \in \mathbb{N},$$

où on note $\chi_k(\theta)$ à la place de $\chi_k(R_\theta)$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a aussi $\mathrm{d}_{\chi_k} = 2k+1$ ([Sim96] p.205). On peut alors vérifier, en utilisant l'unicité de la décomposition en composantes isotypiques (proposition 6), que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$L^2_{\chi_k} = L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k.$$

1.6.2 Représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_n$

$SO(n)$ agit sur $L^2(X)$ via l'action μ définie précédemment et donc, en composant avec l'exponentielle, son algèbre de Lie $\mathfrak{so}_n$ agit aussi sur $L^2(X)$. Cette action est définie par les opérateurs de différentiation suivant

$$D_\xi f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e^{-t\xi}.x)_{|t=0}, \quad \xi \in \mathfrak{so}_n,\ f \in H^1(X),\ x \in X.$$

En fait, on considérera la complexification de $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{so}_n^{\mathbb{C}} := \mathfrak{so}_n + i\mathfrak{so}_n$, qu'on notera $\mathfrak{g}$ dans la suite pour simplifier l'écriture. Prenons alors une **sous-algèbre de Cartan** $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. On décrit $\mathfrak{h}$ comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ l'algèbre de Lie du groupe linéaire. Pour une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $2p \times 2p$, on définit $B_{k\ell}(A)$, $1 \leq k, \ell \leq p$, comme étant le bloc de taille 2×2 extrait de A suivant

$$B_{k\ell}(A) := \begin{pmatrix} a_{2k-1,2\ell-1} & a_{2k-1,2\ell} \\ a_{2k,2\ell-1} & a_{2k,2\ell} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie dont une base est $(\zeta_k)_{1\leq k\leq p}$ avec p la partie entière de $\frac{n}{2}$ et $B_{kk}(\zeta_k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ et tous les autres blocs 2×2 sont nuls (pour n impair la dernière ligne et la dernière colonne de tous les ζ_k sont nulles). On note (ω_k) la base duale de (ζ_k) dans $\mathfrak{h}^*$.

On rappelle que $\mathfrak{g}$ agit sur elle même par la représentation adjointe définie par

$$\mathrm{ad}(X) : Y \to [X, Y], \quad (X, Y) \in \mathfrak{g}^2.$$

On considère le produit scalaire de Killing suivant,

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\overline{X}) \circ \mathrm{ad}(Y)), \quad (X, Y) \in \mathfrak{g}^2$$

où la conjugaison est définie par $\overline{Z + iW} = -Z + iW$ avec Z et W réels. Ainsi, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\overline{[X, Y]} = -[\overline{X}, \overline{Y}]$. On remarque alors que, pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$, on a $\overline{\xi} = \xi$ et donc $\mathrm{ad}(\xi)$ est auto-adjoint. (cf [Sim96] p.177) Alors les $\{\mathrm{ad}(\xi) \; ; \; \xi \in \mathfrak{h}\}$ sont des opérateurs auto-adjoints sur $\mathfrak{g}$ qui commutent entre eux. On peut donc les diagonaliser simultanément et décomposer $\mathfrak{g}$ selon les espaces propres.

On a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ où la somme se fait sur un ensemble fini de $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ qui sont les **racines** de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \; ; \; \mathrm{ad}(\xi)(X) = \alpha(\xi)X, \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}\}$ sont les **sous-espaces de racines** (ils sont tous de dimension 1 cf [Sim96] p.180). Soit $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau entier engendré par les racines. Sur Λ on se donne un ordre lexicographique "$\preceq$" en faisant le choix $\omega_1 \succeq \ldots \succeq \omega_p$. On appelle alors $\mathfrak{g}_+ := \bigoplus\limits_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha$ (respectivement $\mathfrak{g}_- := \bigoplus\limits_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha$) la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les sous-espaces de racines positives (respectivement négatives). On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. On renvoie à [Sim96], chapitre VIII, pour une théorie générale et à la section suivante pour le calcul explicite de ces sous-espaces de racines.

Revenons à nos espaces propres du laplacien sur la sphère, H^k, qui sont des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$. Ils se décomposent sous l'action de $\mathfrak{h}$:

$$H^k = \bigoplus_{\omega^k_{min} \preceq \omega \preceq \omega^k_{max}} H^k_\omega,$$

où les ω qui parcourent un sous-ensemble fini de $\mathfrak{h}^*$ sont les **poids** de H^k. En fait ces poids sont tous congruents modulo Λ (voir [FH91] p.199) donc on peut bien les ordonner avec "$\preceq$". Les **sous-espaces de poids** correspondant, H^k_ω, sont définis par $H^k_\omega = \{f \in H^k ; D_\xi f = \omega(\xi) f, \ \forall \xi \in \mathfrak{h}\}$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 5 *Si $f \in H^k_\omega$ et si $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$, alors $D_\xi f \in H^k_{\omega+\alpha}$.*

Preuve : pour tout $\zeta \in \mathfrak{h}$, on a

$$D_\zeta(D_\xi f) = D_\xi(D_\zeta f) + D_{[\zeta,\xi]} f.$$

Or $[\zeta,\xi] = \mathrm{ad}(\zeta)(\xi) = \alpha(\zeta)\xi$ car $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$, et $D_\zeta f = \omega(\zeta) f$ par définition de H^k_ω. Donc

$$D_\zeta(D_\xi f) = \omega(\zeta) D_\xi f + \alpha(\zeta) D_\xi f = (\omega+\alpha)(\zeta)(D_\xi f). \ \Box$$

La décomposition précédente de H^k fait apparaître des vecteurs particuliers qui vont nous servir de support pour le décalage nécessaire à la construction de nos potentiels isorésonants ; ce sont les vecteurs de poids maximal définis par

Définition 3 *Un vecteur non nul $f \in H^k$ est un **vecteur de poids maximal** si c'est un vecteur propre de tous les D_ξ, $\xi \in \mathfrak{h}$, et s'il est dans le noyau de tous les D_ξ, $\xi \in \mathfrak{g}_+$.*

En fait, comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n^{\mathbb{C}}$ est semi-simple et que H^k en est une représentation irréductible, on sait (voir par exemple dans [FH91] p.202) qu'il y a unicité, à scalaire près, d'un tel vecteur de poids maximal et qu'il engendre $H^k_{\omega^k_{max}}$ qui est de dimension 1 ; on le note $\boldsymbol{v^k_{max}}$.

Dans la section suivante on calcule explicitement le vecteur de poids maximal de H^k. Mais avant, établissons le lemme suivant qui caractérise $H^k_{\omega^k_{max}}$.

Lemme 6

$$H^k_{\omega^k_{max}} = H^k \cap \big(\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}_+} \mathrm{Ker}\, D_\xi \big).$$

Preuve : l'inclusion $H^k_{\omega^k_{max}} \subset H^k \cap \big(\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}_+} \mathrm{Ker}\, D_\xi \big)$ résulte de la définition d'un vecteur de poids maximal. Soit $u \in H^k \cap \big(\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}_+} \mathrm{Ker}\, D_\xi \big)$, alors $u \in H^k = \bigoplus_{\omega^k_{min} \preceq \omega \preceq \omega^k_{max}} H^k_\omega$ et on écrit $u = \sum_{\omega^k_{min} \preceq \omega \preceq \omega^k_{max}} u_\omega$ avec $u_\omega \in H^k_\omega$. Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}_\beta$ avec $\beta \succ 0$, on a $D_\xi u_\omega \in H^k_{\omega+\beta}$ grâce au lemme 5. Par hypothèse, on a

$$D_\xi u = \sum_{\omega^k_{min} \preceq \omega \preceq \omega^k_{max}} D_\xi u_\omega = 0,$$

et, comme la somme précédente est directe, on a pour tout ω :

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}_+ \ \ D_\xi u_\omega = 0.$$

De plus, pour tout ω, par définition de H^k_ω, u_ω est un vecteur propre de tous les D_ξ, $\xi \in \mathfrak{h}$. Donc par définition et unicité d'un vecteur de poids maximal, on a $u_\omega = 0$ sauf pour $u_{\omega^k_{max}}$ et on peut conclure : $u \in H^k_{\omega^k_{max}}$. $\Box$

1.6.3 Calcul des vecteurs de poids maximal

On commence par faire le calcul pour $n = 2p$ pair. On rappelle qu'on a déjà défini $\mathfrak{h}$, sa base $(\zeta_i)_{1\leq i\leq p}$ et sa base duale $(\omega_i)_{1\leq i\leq p}$ et ordonné les racines en choisissant $\omega_1 \succeq \ldots \succeq \omega_p$.

On se donne d'abord les matrices (de Pauli) 2×2 suivantes : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Puis étant donnée une matrice 2×2, A, on définit les matrices $2p\times 2p$, $E_{ij}(A)$, $1 \leq i < j \leq p$, par

$$\begin{aligned} B_{k\ell}(E_{ij}(A)) &= A && \text{pour } k = i,\ \ell = j \\ &= -{}^tA && \text{pour } k = j,\ \ell = i \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $\ell \notin \{i, j\}$, $[\zeta_\ell, E_{ij}(A)] = 0$ et que

$$\begin{aligned} [\zeta_i, E_{ij}(A)] &= E_{ij}(\sigma_2 A) \\ [\zeta_j, E_{ij}(A)] &= E_{ij}(-A\sigma_2). \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $1 \leq i < j \leq p$,

$$\begin{aligned} [\zeta_i, E_{ij}(1 \pm \sigma_2)] &= \pm E_{ij}(1 \pm \sigma_2) \\ [\zeta_j, E_{ij}(1 \pm \sigma_2)] &= \mp E_{ij}(1 \pm \sigma_2) \\ [\zeta_i, E_{ij}(\sigma_1 \mp i\sigma_3)] &= \pm E_{ij}(\sigma_1 \mp i\sigma_3) \\ [\zeta_j, E_{ij}(\sigma_1 \mp i\sigma_3)] &= \pm E_{ij}(\sigma_1 \mp i\sigma_3). \end{aligned}$$

On trouve donc, pour tout $1 \leq i < j \leq p$, comme racines positives $\omega_i - \omega_j$ dont le sous-espace $\mathfrak{g}_{\omega_i-\omega_j}$ est engendré par $E_{ij}(1+\sigma_2)$ et $\omega_i + \omega_j$ avec $\mathfrak{g}_{\omega_i+\omega_j}$ engendré par $E_{ij}(\sigma_1 - i\sigma_3)$. Comme racines négatives on a $\omega_j - \omega_i$ avec $\mathfrak{g}_{\omega_j-\omega_i}$ engendré par $E_{ij}(1-\sigma_2)$ et $-\omega_i - \omega_j$ avec $\mathfrak{g}_{-\omega_i-\omega_j}$ engendré par $E_{ij}(\sigma_1 + i\sigma_3)$.

On revient à notre variété X de dimension $n = 2p$ et via le difféomorphisme entre $X \setminus \{O\}$ et $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donné par l'hypothèse C, on travaille avec les coordonnées $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p)$ de $\mathbb{R}^n$. Pour mettre la main sur un vecteur de poids maximal on aura besoin de connaître D_ξ pour tout ξ dans $\mathfrak{h} \cup \mathfrak{g}_+$. Pour cela on revient à la définition de D_ξ. Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, $D_\xi = D_{\mathrm{Re}\xi} + iD_{\mathrm{Im}\xi}$ et pour tout $\chi \in \mathfrak{so}_n$ on a $D_\chi f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(e^{-t\chi}.x)_{|t=0}$ avec $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. On peut même dire que $D_\chi f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F((1 - t\chi).x)_{|t=0}$ où F est un prolongement (ça ne dépend pas du prolongement choisi) de f sur un voisinage de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On a, pour tout $1 \leq j \leq p$, $\mathrm{Re}\zeta_j = 0$ et

$$B_{jj}(1 - t\mathrm{Im}\zeta_j) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

et en dehors de ce bloc 2×2, $1 - t\mathrm{Im}\zeta_j$ contient des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. On en déduit

$$D_{\zeta_j} = iD_{\mathrm{Im}\zeta_j} = -i(y_j\partial_{x_j} - x_j\partial_{y_j}),\ 1 \leq j \leq p,$$

qu'il faut interpréter comme suit : pour $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $D_{\zeta_j} f = -i(y_j \partial_{x_j} F - x_j \partial_{y_j} F)$ avec F un prolongement de f sur un voisinage de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Ensuite, on a, pour tout $1 \leq k < \ell \leq p$,

$$1 - t\mathrm{Re}(E_{k\ell}(1+\sigma_2)) = 1 - tE_{k\ell}(1),$$

et donc

$$D_{\mathrm{Re}(E_{k\ell}(1+\sigma_2))} = -x_\ell \partial_{x_k} - y_\ell \partial_{y_k} + x_k \partial_{x_\ell} + y_k \partial_{y_\ell}.$$

On a aussi

$$1 - t\mathrm{Im}(E_{k\ell}(1+\sigma_2)) = 1 - tE_{k\ell}(-i\sigma_2),$$

et donc

$$D_{\mathrm{Im}(E_{k\ell}(1+\sigma_2))} = y_\ell \partial_{x_k} - x_\ell \partial_{y_k} + y_k \partial_{x_\ell} - x_k \partial_{y_\ell}.$$

Finalement

$$D_{E_{k\ell}(1+\sigma_2)} = (-x_\ell + iy_\ell)(\partial_{x_k} + i\partial_{y_k}) - (x_k + iy_k)(-\partial_{x_\ell} + i\partial_{y_\ell}).$$

De même on trouve

$$D_{E_{k\ell}(\sigma_1 - i\sigma_3)} = (ix_\ell - y_\ell)(\partial_{x_k} + i\partial_{y_k}) - (ix_k - y_k)(\partial_{x_\ell} + i\partial_{y_\ell}).$$

On peut alors vérifier que $\boldsymbol{v^k_{max} := (x_1 + iy_1)^k}$ est bien le (à scalaire près) vecteur de poids maximal de la représentation H^k. Ici les coordonnées $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p)$ sont restreintes à $\mathbb{S}^{n-1}$. En effet, déjà v^k_{max} est homogène de degré k et c'est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ d'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$; il appartient donc bien à l'espace propre du laplacien sur la sphère H^k (cf [BGM71]). Ensuite, on calcule, grâce aux formules trouvées précédemment,

$$D_{\zeta_1}(v^k_{max}) = -kv^k_{max} = -k\omega_1(\zeta_1)v^k_{max},$$

et, pour tout $j > 1$,

$$D_{\zeta_j}(v^k_{max}) = 0 = -k\omega_1(\zeta_j)v^k_{max}.$$

Donc v^k_{max} est un vecteur de poids $-k\omega_1$. Il reste à regarder s'il est dans le noyau des D_ξ, $\xi \in \mathfrak{g}_+$. Or il est clair que pour tout $1 < k < \ell \leq p$ on a

$$D_{E_{k\ell}(1+\sigma_2)} v^k_{max} = D_{E_{k\ell}(\sigma_1 - i\sigma_3)} v^k_{max} = 0.$$

Pour tout ℓ, on a aussi après simplifications

$$D_{E_{1\ell}(1+\sigma_2)} v^k_{max} = D_{E_{1\ell}(\sigma_1 - i\sigma_3)} v^k_{max} = 0,$$

ce qui termine la vérification.

Dans le cas $n = 2p+1$ impair, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est la même que dans le cas pair en complétant les matrices par des zéros sur la dernière ligne et la dernière colonne. On prend la même base de $\mathfrak{h}$, toujours en complétant par des zéros et le même ordre sur la base duale. On retrouve alors les mêmes racines auxquelles il faut ajouter des racines positives : les ω_j, $1 \leq j \leq p$, et des racines négatives : $-\omega_j$, $1 \leq j \leq p$. Les sous-espaces de racines correspondant aux ω_j sont engendrés par les Y_j définis par

$$[Y_j]_{2p+1,2j-1} = -1,\ [Y_j]_{2p+1,2j} = -i,\ [Y_j]_{2j-1,2p+1} = 1,\ [Y_j]_{2j,2p+1} = i,$$

et des 0 partout ailleurs. Dans les coordonnées $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p, z)$, on trouve

$$D_{Y_j} = z(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j}) - (x_j + iy_j)\partial_z.$$

On peut alors prendre le même vecteur de poids maximal que dans le cas pair, c'est-à-dire $\boldsymbol{v^k_{max} := (x_1 + iy_1)^k}$. Il faut ajouter aux vérifications du cas pair que, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$D_{Y_j} v^k_{max} = 0.$$

On peut alors expliciter le décalage qui nous servira à construire des potentiels isorésonants :

Lemme 7 *Pour tout $s \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, et pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$,*

$$sv^k_{max} : L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^\ell_{\omega^\ell_{max}} \to L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^{\ell+k}_{\omega^{\ell+k}_{max}}.$$

La preuve est évidente compte-tenu des vecteurs de poids maximal trouvés.

On utilisera ce décalage en travaillant sur $L^2(X)^+ := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}}$ au lieu de $L^2(X)$.

Chapitre 2

Estimations sur le bas du spectre du laplacien de Dirichlet sur les espaces de symétrie

On considère une variété X et une action isométrique et effective de $\mathbb{S}^1$ sur celle-ci. On peut définir les espaces de symétrie $L^2_j(X)$ correspondant. Le but de ce chapitre est de donner une minoration de la première valeur propre du laplacien de Dirichlet opérant sur les fonctions de $L^2_j(X)$ à support dans un compact. Cette minoration nous servira, dans la suite, à majorer la norme de la résolvante libre sur ces mêmes espaces.

2.1 Action de $\mathbb{S}^1$ sur les orbites principales

On va commencer par donner une majoration et une minoration de la première valeur propre du laplacien de Dirichlet agissant sur les fonctions dans $L^2_j(X)$ à support compact, en se servant des **orbites principales** de l'action de $\mathbb{S}^1$ sur X. Ce sont les orbites dont le stabilisateur est réduit au neutre et elles forment un ouvert connexe et dense dans X.

2.1.1 Majoration du bas du spectre

On ne se servira pas de cette majoration dans la suite mais il me semble utile de la signaler vu l'absence dans la littérature d'estimation précise pour le bas du spectre du laplacien sur les espaces de symétrie.

Lemme 8 *Soit $K \subset X$ un compact à bord régulier invariant sous une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ supposée effective (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément non trivial de $\mathbb{S}^1$ qui stabilise tout X). Il existe une constante $C = C(K) > 0$ telle que* *pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\text{Min Spec } \Delta_{L^2_j(K)} \leq C < j >^2,$$

où $\Delta_{L^2_j(K)}$ est l'extension auto-adjointe de Friedrichs sur $L^2_j(K)$ du laplacien défini sur $C_c^\infty(K) \cap L^2_j(K)$ et $< j >= (1+ \mid j \mid^2)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve : on a

$$\text{Min Spec } \Delta_{L^2_j(K)} = \inf_{\phi \in L^2_j(K)\setminus\{0\}} \frac{\langle \Delta\phi, \phi\rangle}{\parallel \phi \parallel^2}.$$

Il suffit donc de pouvoir construire, dès que j est assez grand, une $\phi_j \in L^2_j(K)\setminus\{0\}$ telle que $\langle \Delta\phi_j, \phi_j\rangle \leq Cj^2 \parallel \phi_j \parallel^2$ avec C ne dépendant pas de j. Soit U_j un ouvert $\mathbb{S}^1$ invariant de $\widehat{K}$ tel que le fibré principal $\widehat{K} \to \widehat{K}/\mathbb{S}^1$ soit trivial sur U_j et tel que $U_j/\mathbb{S}^1$ soit difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Donc U_j est difféomorphe à $(U_j/\mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ et on note $(\mathbf{y}, \theta) := (y_1, \dots, y_N, \theta)$ les coordonnées correspondantes. Dans ces coordonnées, la métrique prend la forme

$$g_{|U_{\phi_j}} = \sum_{k,\ell=1}^N a_{k,\ell}(\mathbf{y})\mathrm{d}y_k\mathrm{d}y_\ell + b(\mathbf{y})\mathrm{d}\theta^2 + \sum_{k=1}^N c_k(\mathbf{y})\mathrm{d}y_k\mathrm{d}\theta,$$

avec $a_{k,\ell}, b$ et c_k lisses sur U_j, et le laplacien devient

$$\begin{aligned}\Delta = &\sum_{k,\ell=1}^N A_{k,\ell}(\mathbf{y})\partial_{y_k}\partial_{y_\ell} + B(\mathbf{y})\partial_\theta^2 + \sum_{k=1}^N C_k(\mathbf{y})\partial_\theta\partial_{y_k} \\ &+ \sum_{k=1}^N D_k(\mathbf{y})\partial_{y_k} + E(\mathbf{y})\partial_\theta,\end{aligned}$$

avec $A_{k,\ell}, B, C_k, D_k$ et E lisses sur U_j.

Prenons $\phi_j(\mathbf{y}, \theta) = \psi(\mathbf{y})e^{-ij\theta}$ avec ψ lisse à support compact dans $U_j/\mathbb{S}^1$ telle que ϕ_j soit à support dans U_j. Alors ϕ_j est bien dans $L^2_j(K)$ et

$$\begin{aligned}\Delta\phi_j =&\Big(\sum_{k,\ell=1}^N A_{k,\ell}(\mathbf{y})\partial_{y_k}\partial_{y_\ell}\psi - j^2B(\mathbf{y})\psi - ij\sum_{k=1}^N C_k(\mathbf{y})\partial_{y_k}\psi \\ &+ \sum_{k=1}^N D_k(\mathbf{y})\partial_{y_k}\psi - ijE(\mathbf{y})\psi\Big)e^{ij\theta},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle \Delta\phi_j, \phi_j\rangle =& - j^2 \int_{\text{supp}\,\phi_j} B(\mathbf{y}) \mid \psi \mid^2 \mathrm{dvol}(g) \\ &- ij \int_{\text{supp}\,\phi_j} \sum_{k=1}^N C_k(\mathbf{y})(\partial_{y_k}\psi)\overline{\psi} + E(\mathbf{y}) \mid \psi \mid^2 \mathrm{dvol}(g) \\ &+ \int_{\text{supp}\,\phi_j} \sum_{k,\ell=1}^N A_{k,\ell}(\mathbf{y})(\partial_{y_k}\partial_{y_\ell}\psi)\overline{\psi} + \sum_{k=1}^N D_k(\mathbf{y})(\partial_{y_k}\psi)\overline{\psi}\ \mathrm{dvol}(g)\end{aligned}$$

d'où

$$\langle \Delta\phi_j, \phi_j \rangle = | \langle \Delta\phi_j, \phi_j \rangle | \leq \Lambda_1(\psi) j^2 \parallel \psi \parallel^2_{L^2(K,g)} + \Lambda_2(\psi) j + \Lambda_3(\psi),$$

avec $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ positives et ne dépendant que de ψ.

En fixant ψ et en faisant varier j on obtient bien, en remarquant que $\parallel \phi_j \parallel = \parallel \psi \parallel$, qu'il existe une constante C dépendant de ψ telle qu'on ait

$$\langle \Delta\phi_j, \phi_j \rangle \leq C < j >^2 \parallel \phi_j \parallel^2 . \ \square$$

2.1.2 Minoration du bas du spectre sur les orbites principales

Pour motiver la section suivante, on peut voir qu'on peut obtenir la minoration voulue sur des compacts particuliers notamment contenus dans les orbites principales de l'action de $\mathbb{S}^1$.

Lemme 9 *Soit $K \subset X$ un compact à bord régulier invariant sous une action effective de $\mathbb{S}^1$ tel que l'espace des orbites $K/\mathbb{S}^1$ soit une variété sur laquelle K est fibré trivialement : $K \simeq (K/\mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$.*

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\text{Min Spec } \Delta_{L^2_j(K)} \geq Cj^2$$

Preuve : soit Φ lisse sur K, $\mathbb{S}^1$ invariante sur K s'annulant sur le bord de K. On a la suite d'inégalités commentées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta(e^{-ij\theta}\Phi), e^{-ij\theta}\Phi \rangle &= \langle \Delta(\Phi), \Phi \rangle + 2\langle\langle \nabla(e^{-ij\theta}), \nabla\Phi \rangle, e^{-ij\theta}\Phi \rangle + \langle \Delta(e^{-ij\theta})\Phi, e^{-ij\theta}\Phi \rangle \\
&\geq \langle \Delta(\Phi), \Phi \rangle - 2 \int_K \eta \|\nabla(e^{-ij\theta})\| \, \|\nabla\Phi\| \, |\Phi| \text{dvol} + \langle \Delta(e^{-ij\theta})\Phi, e^{-ij\theta}\Phi \rangle \\
&\geq \int_K \Big(\|\nabla\Phi\|^2 - 2\eta \|\nabla(e^{-ij\theta})\| \, \|\nabla\Phi\| \, |\Phi| \Big) \text{dvol} + \langle \Delta(e^{-ij\theta})\Phi, e^{-ij\theta}\Phi \rangle \\
&\geq \int_K \Big(\|\nabla\Phi\| - \eta \|\nabla(e^{-ij\theta})\| \, |\Phi| \Big)^2 \text{dvol} \\
&\qquad\qquad + \int_K \Big(\Delta(e^{-ij\theta})e^{ij\theta} - \eta^2 \|\nabla(e^{-ij\theta})\|^2 \Big) |\Phi|^2 \text{dvol} \\
&\geq Cj^2 \int_K |\Phi|^2 \text{dvol} = Cj^2 \|\Phi\|^2.
\end{aligned}$$

Dans la première inégalité, on a utilisé le fait que $u = \nabla(e^{-ij\theta}) = -ije^{-ij\theta}\nabla(\theta)$ et $v = \nabla\Phi$ sont dans des sous-espaces vectoriels supplémentaires[1] et donc par (le cas d'inégalité de) Cauchy-Schwarz et un argument de compacité invoqué sur le compact K, il existe $\eta \in (0, 1)$ tel que $\langle u, v \rangle \leq \eta \|u\| \, \|v\|$.

[1]Dans un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_N, \theta)$, le vecteur $\nabla(\theta)$ est orthogonal aux $\partial_{y_i}, i = 1, \ldots, N$, alors que les vecteurs $\nabla(\Phi)$ sont tous orthogonaux à ∂_θ : les orthogonaux $\partial_\theta^\perp$ et $\text{Vect}(\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_N})^\perp$ sont supplémentaires, comme le sont $\mathbb{R}\nabla(\theta)$ et $\text{Vect}(\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_N})$

Dans la seconde inégalité, on a utilisé $\langle \Delta\Phi, \Phi\rangle = \int_K \|\nabla\Phi\|^2 \mathrm{dvol}$.

Dans l'avant dernière expression, le premier terme est positif et sera minoré par 0, alors que dans le second terme, le second facteur de l'intégrant est un polynôme en j du second degré, avec terme dominant jamais nul : les opérateurs $u \to \Delta u$ et $u \to \|\nabla u\|^2$ ont même symbole principal $\xi \in T^*K \to \|\xi\|^2$. Ainsi, ce second facteur est un polynôme en j avec terme dominant positif $((1-\eta^2)\|d\theta\|^2)$ ne s'annulant jamais sur le compact : on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que ce facteur soit minoré par Cj^2 pour $|j|$ assez grand.

Ensuite quitte à prendre une constante C plus petite on a l'inégalité pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On conclut en utilisant

$$\text{Min Spec } \Delta_{L^2_j(K)} = \inf_{\phi \in L^2_j(K)\setminus\{0\}} \frac{\langle \Delta\phi, \phi\rangle}{\|\phi\|^2},$$

et le fait que toute $\phi \in L^2_j(K)$ est de la forme $e^{-ij\theta}\Phi$ $\square$

Donnons quelques exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ euclidien muni de ses coordonnées polaires (r, θ), on peut considérer l'action de $\mathbb{S}^1$ donnée par $e^{i\alpha}.(r,\theta) = (r, \theta+\alpha)$. Seul le point fixe 0 n'est pas une orbite principale. Le laplacien devient : $\Delta = -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$. Pour K on peut prendre une couronne centrée en 0 de plus petit rayon $a > 0$ et de plus grand rayon b. Alors toute $\phi \in L^2_j(\mathbb{R}^2)$ lisse à support dans K s'écrit $\phi(r,\theta) = \psi(r)e^{-ij\theta}$ et on trouve

$$\langle \Delta\phi, \phi\rangle = 2\pi j^2 \int_a^b \frac{|\phi|^2}{r}\mathrm{d}r + 2\pi \int_a^b r\ |\partial_r\phi|^2 \geq \frac{j^2}{b^2}\ \|\phi\|^2 .$$

- On peut aussi regarder l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ vu comme $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique $\mathrm{d}r^2 + \mathrm{sh}^2(r)\mathrm{d}\theta^2$, et considérer l'action de $\mathbb{S}^1$ définie comme dans le cas euclidien. Le laplacien devient : $\Delta = -\partial_r^2 - \frac{1}{\mathrm{sh}^2(r)}\partial_\theta^2 + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\mathrm{sh}^2(r)})$. Si on prend encore pour K une couronne de rayons $b > a > 0$, alors pour tout $|j| > \frac{\mathrm{sh}^2(b)}{2\ \mathrm{sh}^2(a)}$ et pour toute $\phi \in L^2_j(K)$, on a

$$\langle \Delta\phi, \phi\rangle \geq \frac{j^2}{2\ \mathrm{sh}^2(b)}\ \|\phi\|^2 .$$

2.2 Action de $\mathbb{S}^1$: cas général

Comme dans les exemples précédents, on veut obtenir une minoration de la première valeur propre λ_1^j du laplacien de Dirichlet sur $L^2_j(K)$ mais avec cette fois le compact K pouvant intersecter les orbites singulières, c'est-à-dire non principales. Dans le cas du plan euclidien, on peut prendre pour K le disque de centre 0 et de rayon R (il contient bien le point fixe 0) et alors l'équation aux valeurs propres $\Delta_{L^2_j(K)}u = \lambda u$ s'écrit en coordonnées polaires : $r^2\partial_r^2 u + r\partial_r u + (\lambda r^2 - j^2)u = 0$

avec $u(R) = 0$. On reconnaît une équation de Bessel dont les solutions sont $u(r) = J_{\pm j}(\sqrt{\lambda}r)$. Les estimations sur le premier zéro $z_{1,j}$ de J_j ([AS64]) donnent, pour j grand, $z_{1,j} \sim j$. Comme on doit avoir $\sqrt{\lambda_1^j}R = z_{1,j}$, il existe une constante C telle que $\lambda_1^j > C\frac{j^2}{R^2}$. Pour obtenir une minoration dans le cas général on va se servir d'un résultat dû à Colin de Verdière [CdV79].

2.2.1 Spectre joint d'opérateurs qui commutent

Soit M une variété compacte munie d'une forme volume sur laquelle on peut donc définir l'espace $L^2(M)$. On considère k opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, $P_1, \ldots, P_k$, tous auto-adjoints pour le produit scalaire L^2, qui commutent entre eux et tels que $Q = \sum_{i=1}^{k} P_i^2$ soit elliptique. Alors on peut définir, le **spectre joint** de ces opérateurs comme étant le sous-ensemble, avec multiplicité, $\mathbf{\Lambda}$, de $\mathbb{R}^k$ des $\lambda_\alpha = (\lambda_\alpha^1, \ldots, \lambda_\alpha^k)$ avec, pour tout $1 \leq i \leq k$, $P_i\phi_\alpha = \lambda_\alpha^i\phi_\alpha$ où (ϕ_α) est une base orthonormée de $L^2(M)$. Si p_i est le symbole principal de P_i, on notera aussi $p = (p_1, \ldots, p_k) \in C^\infty(T^*M \setminus \{0\}, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$, le **symbole joint** des P_i et $\mathbf{\Gamma}$ son image. Colin de Verdière, dans [CdV79], établit le résultat suivant dans lequel on reprend les notations qu'on vient de donner,

Théorème 3 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ le spectre joint de k opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 sur une variété compacte M, $P_1, \ldots, P_k$, tous auto-adjoints, qui commutent entre eux et tels que $Q = \sum_{i=1}^{k} P_i^2$ soit elliptique. Soit $\mathcal{C}$ un cône de $\mathbb{R}^k$ et $u = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathcal{C}} a_\lambda \phi_\lambda$, $a_\lambda \in \mathbb{R}$, alors le front d'onde de u vérifie : $WF(u) \subset p^{-1}(\mathcal{C})$. En particulier, si $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{0\}$ alors $\mathcal{C} \cap \Lambda$ est fini.*

Preuve : on donne la preuve de Colin de Verdière pour indication. Soit $\xi_0 \in T^*M \setminus \{0\}$ tel que $\tau_0 = p(\xi_0) \notin \mathcal{C}$, et soit ψ une fonction C^∞ et homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ telle que $\psi(\tau_0) \neq 0$ et $\psi_{|\mathcal{C}} \equiv 0$. Strichartz ([Str72]) a montré, avec les hypothèses du théorème, qu'on peut définir l'opérateur pseudo-différentiel $\psi(P_1, \ldots, P_k)$ et il prouve que son symbole principal est $\psi(p_1, \ldots, p_k)$. Or, si $\lambda \in \Lambda \cap \mathcal{C}$, alors $\psi(P_1, \ldots, P_k)\phi_\lambda = \psi(\lambda)\phi_\lambda = 0$ et donc pour $u = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathcal{C}} a_\lambda \phi_\lambda$ on a $\psi(P_1, \ldots, P_k)u = 0$. De plus l'hypothèse sur ψ donne que $\psi(P_1, \ldots, P_k)$ est elliptique en ξ_0 et donc $\xi_0 \notin WF(u)$.

En particulier, si $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{0\}$ alors pour toute $u = \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \mathcal{C}} a_\lambda \phi_\lambda$, $WF(u) = \emptyset$. En effet, si $\xi \in WF(u)$ alors, d'après ce qui précède, $p(\xi) = (p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)) \in \mathcal{C} \cap \Gamma$ et donc $p(\xi) = 0$. Mais alors le symbole principal de Q qui est $\sum p_i^2$ s'annule en ξ et comme Q est elliptique on a donc $\xi = 0$. Soit E le sous-espace vectoriel de $L^2(M)$ engendré par les $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{C} \cap \Lambda}$, on a donc $E \subset C^\infty(M)$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli pour montrer que l'identité sur E est compacte, puis le théorème de Riesz prouve que E est de dimension finie. Donc $\mathcal{C} \cap \Lambda$ est fini. $\square$

2.2.2 Minoration du bas du spectre

On va appliquer le résultat de Colin de Verdière avec comme opérateurs pseudo-différentiels la racine carrée du laplacien et le champ de vecteur induit par l'action de $\mathbb{S}^1$. On obtient

Proposition 8 *Soit K une variété compacte à bord, possédant une action de $\mathbb{S}^1$ et munie d'une métrique g telle que $\mathbb{S}^1$ agisse par isométries sur (K, g) et que g puisse s'écrire comme une métrique produit $\mathrm{d}\rho^2 + h_{\partial K}$ dans un voisinage du bord de K, ∂K, avec ρ une fonction $\mathbb{S}^1$ invariante définissant le bord de K et h ne dépendant pas de ρ. Alors il existe une constante $C = C(K) > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\text{Min Spec } \Delta_{L^2_j(K)} \geq Cj^2.$$

Preuve : Si on considère deux copies de K, on peut identifier leur bord régulier et obtenir une variété compacte sans bord qu'on appellera M. Plus précisément, il existe un voisinage collier W de ∂K difféomorphe à $[0, \epsilon) \times \partial K$ par le difféomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0, \epsilon) \times \partial K & \to & W \\ (t, y) & \to & \psi_t(y), \end{array}$$

où ψ_t est le flot du gradient de ρ pour la métrique g. Ainsi sur l'espace topologique $M = (K \sqcup K)/\partial K$, on peut construire un atlas différentiel en commençant par $\partial K \subset M$ qui est inclus dans un ouvert $[W] = (W \sqcup W)/\partial K$ difféomorphe à $(-\epsilon, \epsilon) \times \partial K$ par

$$\begin{array}{rcl} (-\epsilon, \epsilon) \times \partial K & \to & [W] \\ (t, y) & \to & \begin{cases} \psi_t(y), & \text{if } t \geq 0 \\ \psi_{-t}(y), & \text{if } t \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Via le difféomorphisme précédent, l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $[W]$ est en fait celle sur ∂K. Pour les autres cartes il n'y a pas de problème, ce sont celles de l'intérieur de K.

Par hypothèse, g a une forme produit sur un voisinage de ∂K et on peut donc la prolonger en utilisant le symétrique de ρ par rapport à $\partial K \subset M$. On obtient alors une métrique lisse sur M et on a encore une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ sur M.

L'action de $\mathbb{S}^1$ induit un champ de vecteur sur M, on peut le considérer comme un opérateur différentiel d'ordre 1. En multipliant par i, on obtient un opérateur auto-adjoint : $Y.f(m) = -i\partial_\theta(f(e^{-i\theta}.m))_{|\theta=0}$. Un autre opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 sur M est $P := \sqrt{\Delta_M + 1}$, où Δ_M est le laplacien sur (M, g). P et Y commutent car l'action de $\mathbb{S}^1$ est isométrique. Si on pose $Q := P^2 + Y^2$, il est de symbole principal $q(x, \xi) = \mid \xi \mid^2 + (\xi(Y))^2$, $(x, \xi) \in T^*M$ et est donc elliptique. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ le spectre joint de (P, Y), il est constitué des points $(\lambda_k^P, \lambda_k^Y)$ tels que $P\phi_k = \lambda_k^P \phi_k$ et $Y\phi_k = \lambda_k^Y \phi_k$ où (ϕ_k) est une base orthonormée de $L^2(M)$. Le spectre de Y est $\mathbb{Z}$. En effet sur $L^2_j(M)$, Y est l'homothétie de rapport j. En fait, on est en train de chercher à estimer le minimum de la première coordonnée des points de Λ dont la deuxième coordonnée est j. On appellera $\lambda_1^j > 0$ ce minimum.

Le symbole principal joint de P et Y est $p(x,\xi) = (|\xi|, \xi(Y))$; c'est une fonction homogène de degré 1. Alors l'image de p est le cône $\Gamma = \mathbb{R}^+ p(S(T^*M))$ où $S(T^*M)$ est la sphère unité de T^*M. Or $p(S(T^*M)) = \{(1, \xi(Y))\ ;\ |\xi| = 1\}$, donc en prenant par exemple le cône $\mathcal{C} := \mathbb{R}\{(a, |Y|)\ ;\ |a| \leq \frac{1}{2}\}$, où $|Y| = \sup\limits_K g(Y,Y)^{\frac{1}{2}}$, on a $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{0\}$. On applique alors la proposition 3 et $\mathcal{C} \cap \Lambda$ est donc fini. Cela signifie qu'il existe une constante $c := \frac{1}{2|Y|}$ et $J \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $|j| \geq J$, on a $\lambda_1^j \geq c\,|j|$ (voir la figure 2.1) et quitte à prendre c plus petit on a $\lambda_1^j \geq c\,|j|$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Comme $P = \sqrt{\Delta_M + 1}$, il existe une autre constante qu'on notera encore c telle que le minimum du spectre de Δ_M agissant sur $L_j^2(M)$ est supérieur à cj^2.

Pour conclure, le spectre de $\Delta_{L_j^2(K)}$ avec les conditions de Dirichlet est inclus dans le spectre de Δ_M agissant sur $L_j^2(M)$. En effet, soit I l'involution qui échange les deux copies de K dans M, alors les fonctions propres de Δ_M qui sont impaires pour I s'annulent sur l'image de ∂K dans M. Elles correspondent donc à des fonctions propres du laplacien de Dirichlet sur K. $\square$

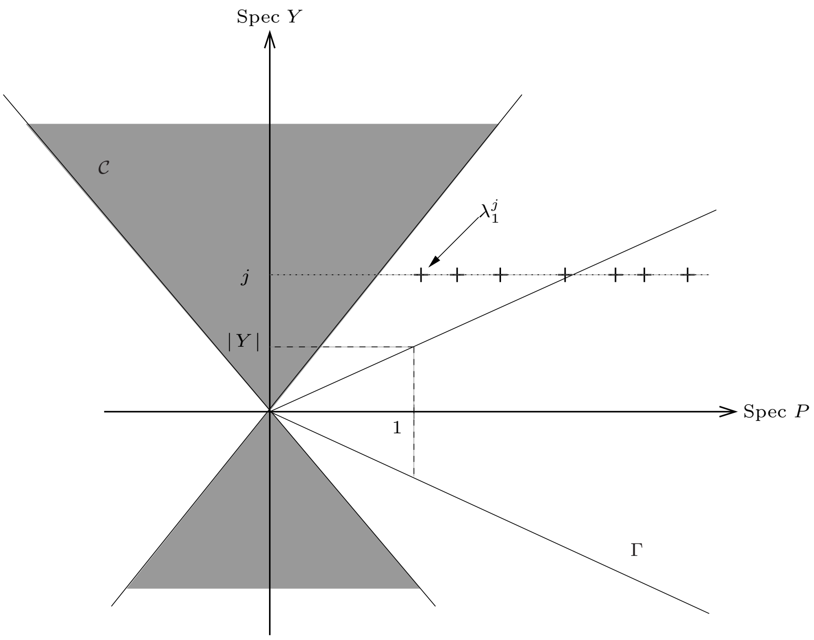

FIG. 2.1 – Estimation de la première valeur propre de Δ_M agissant sur $L_j^2(M)$.

2.3 Action de $(\mathbb{S}^1)^m$

En s'inspirant du cas de $\mathbb{S}^1$, on va obtenir une minoration de la première valeur propre du laplacien de Dirichlet sur les espaces de symétrie de l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$.

On suppose donc que $(\mathbb{S}^1)^m$ agit de manière isométrique sur X et on rappelle qu'on a la décomposition en composantes isotypiques suivante :

$$L^2(X) = \bigoplus_{\underline{j}\in\mathbb{Z}^m} L^2_{\underline{j}}(X).$$

On obtient la minoration suivante

Proposition 9 *Soit K une variété compacte à bord, possédant une action de $(\mathbb{S}^1)^m$ et munie d'une métrique g tels que $(\mathbb{S}^1)^m$ agisse par isométries sur (K,g) et que g puisse s'écrire comme une métrique produit $\mathrm{d}\rho^2 + h_{\partial K}$ dans un voisinage du bord de K, ∂K, avec ρ une fonction définissant le bord de K et $h_{\partial K}$ ne dépendant pas de ρ. Soient ω_i, $1 \leq i \leq N$, N vecteurs de $\mathbb{Z}^m$ tels qu'il existe $h \in \mathbb{R}^m$ avec, pour tout i, $\langle h, \omega_i\rangle > 0$ (produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^m$). Alors pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de K et $\underline{j}$ telle que pour tout $(n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$, tous de même signe, on ait*

$$\text{Min Spec}\, \Delta_{L^2_{\underline{j}+\sum\limits_{1\leq i\leq N} n_i\omega_i}(K)} \geq C\sum_{i=1}^{N} n_i^2.$$

Preuve : comme dans le cas de $\mathbb{S}^1$, on commence par construire M, le double de K sur lequel g se prolonge de manière lisse et l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ reste isométrique. Sur M, on considère les $m+1$ opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 : $P_0 = \sqrt{\Delta_M + 1}, P_1 = -i\partial_{\theta_1}, \ldots, P_m = -i\partial_{\theta_m}$ où on note $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in [0, 2\pi]^m$ les éléments de $(\mathbb{S}^1)^m$. Soit $Q = \sum\limits_{\ell=0}^{m} P_\ell^2$, il est de symbole principal $q(x,\xi) =\mid \xi \mid^2 + \sum\limits_{\ell=1}^{m} \xi(P_\ell)^2$ et est donc elliptique. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^{m+1}$ le spectre joint de $(P_0, \ldots, P_m)$. Les spectre des P_ℓ, $\ell \neq 0$, sont $\mathbb{Z}$ et en fait on cherche à estimer le minimum $\lambda_1(n_1, \ldots, n_N)$ de première coordonnée des points de Λ quand les m dernières prennent les valeurs $\underline{j} + \sum\limits_{i=1}^{N} n_i\omega_i$ avec les n_i suffisamment grands et de même signe.

Soit $p(x,\xi) = (\mid \xi \mid, \xi(P_1), \ldots, \xi(P_m))$ le symbole principal joint de nos opérateurs et Γ son image. Comme p est homogène, qu'il existe $h \in \mathbb{R}^m$ tel que, pour tout i, $\langle h, \omega_i\rangle > 0$, et qu'on a choisi les n_i tous de même signe, on peut trouver un cône de $\mathbb{R}^{m+1}$, $\mathcal{C}$, qui contient tous les points $\{0\} \times \{\underline{j} + \sum\limits_{i=1}^{N} n_i\omega_i\}$ et tel que $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{0\}$ (voir la figure 2.2). Alors on peut appliquer le résultat de Colin de Verdière (théorème 3) pour obtenir $\mathcal{C} \cap \Lambda$ fini.

En conclusion, il existe $J > 0$ et $C > 0$ tels que pour $\sum\limits_{i=1}^{N} n_i^2 \geq J$ on ait $\lambda_1(n_1, \ldots, n_N) \geq C(\sum\limits_{i=1}^{N} n_i^2)$. Comme l'ensemble des $(n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$, tous de même signe tels que $\sum\limits_{i=1}^{N} n_i^2 < J$, est fini, quitte à prendre un C plus petit, on

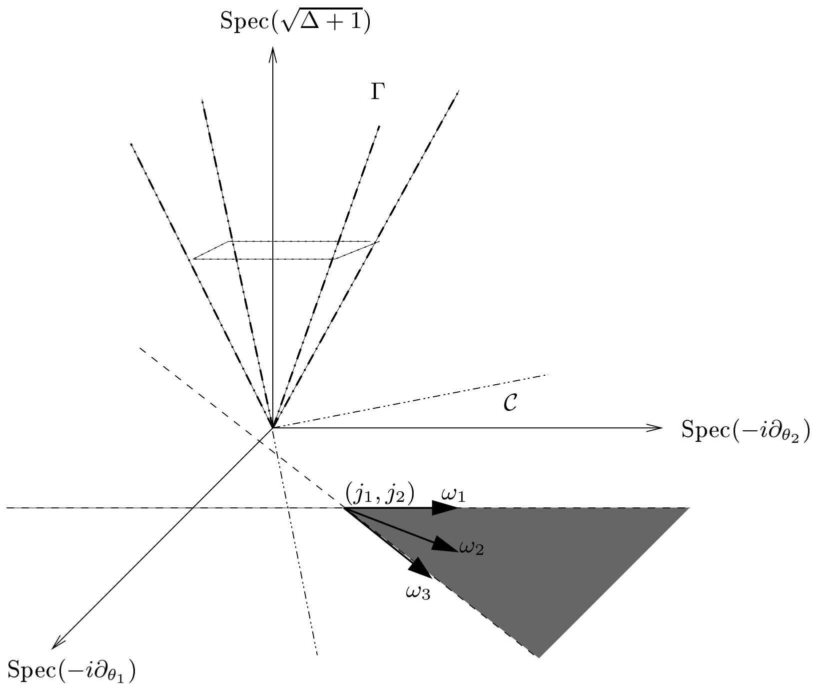

FIG. 2.2 – Les cônes $\mathcal{C}$ et Γ dans le cas $m = 2$.

a $\lambda_1(n_1, \ldots, n_N) \geq C(\sum_{i=1}^{N} n_i^2)$ pour tout $(n_1, \ldots, n_N)$ de même signe. Enfin on conclut le lemme en disant que, comme dans le cas de $\mathbb{S}^1$, le spectre du laplacien de Dirichlet sur K est inclus dans le spectre du laplacien sur M. $\square$

Chapitre 3

Potentiels isorésonants

3.1 Actions de $\mathbb{S}^1$

3.1.1 Énoncé du résultat

On considère une variété riemannienne (X, g) qui possède une action isométrique de $\mathbb{S}^1$. On aura besoin de la proposition 8 du chapitre précédent et pour pouvoir l'appliquer on introduit l'hypothèse suivante sur X,

Hypothèse D : pour tout compact $K \subset X$ il existe une variété compacte à bord $\widetilde{K}$ difféomorphe à un compact de X contenant K, possédant une action de $\mathbb{S}^1$, et munie d'une métrique $\widetilde{g}$ telle que $\widetilde{g}_{|K} = g_{|K}$. On suppose aussi que $\widetilde{g}$ peut s'écrire sous la forme $d\delta^2 + \widetilde{h}_{\partial\widetilde{K}}$ dans un voisinage du bord $\partial\widetilde{K}$ de $\widetilde{K}$, avec δ une fonction $\mathbb{S}^1$ invariante définissant le bord de $\widetilde{K}$ et $\widetilde{h}$ indépendante de δ et enfin que l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $(\widetilde{K}, \widetilde{g})$ est isométrique.

On peut alors énoncer le théorème principal de cette thèse :

Théorème 4 *Soit (X, g) une variété riemannienne qui possède une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ vérifiant l'hypothèse D. On suppose que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ est vérifiée pour un $N > 0$ et une fonction ρ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$ et qu'on a donc un prolongement méromorphe-fini de la résolvante du laplacien libre sur un domaine D_N^+.*

Soit V le potentiel

$$V = \sum_{m=1}^{+\infty} V_m,$$

où les $V_m \in L^\infty(X)$ sont $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids m et vérifient $\sum_{m=1}^{+\infty} \| V_m \|_\infty < +\infty$. Si V vérifie l'hypothèse $B_{N,\rho}$, et si pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ est dans une classe de Schatten $\mathcal{S}_q$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

alors, sur D_N^+, on a $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ et les multiplicités coïncident.

Faisons quelques commentaires. On commence par rappeler la définition des classes de Schatten.

Définition 4 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Si $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur compact, le spectre de ses* ***valeurs singulières****, $(s_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$, est celui des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint $(A^*A)^{1/2}$. Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, la* ***classe de Schatten*** *$\mathcal{S}_\mathrm{p}$ est l'idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formé des opérateurs A pour lesquels la quantité*

$$\| A \|_p^p := \sum_{n=0}^{\infty} s_n^p(A)$$

est finie.

L'hypothèse du théorème 4, $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \in \mathcal{S}_q$ est une hypothèse technique qui nous permettra d'utiliser les déterminants régularisés pour passer du potentiel tronqué au potentiel V tout entier. Si V est à support compact cette hypothèse est vérifiée pour tout N pour tout $q > \frac{\dim X}{2}$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, si V est à décroissance super-exponentielle alors l'hypothèse est encore vraie pour tout N. Pour une variété asymptotiquement hyperbolique X, si V est lisse sur $\overline{X}$ et s'annule à tous les ordres en ρ au voisinage du bord, avec ρ une fonction définissant le bord, alors l'hypothèse est aussi vérifiée pour tout N.

Au lieu de perturber le laplacien libre on peut perturber $\Delta + V_0$ avec V_0 un potentiel invariant sous l'action de $\mathbb{S}^1$ et obtenir que $\mathrm{Res}(\Delta+V_0+V) = \mathrm{Res}(\Delta+V_0)$. Le fait que V_0 soit $\mathbb{S}^1$ invariant assure que, comme le laplacien, il respectera la décomposition de $L^2(X)$ en composantes isotypiques. Pour pouvoir appliquer la proposition 8 à $\Delta + V_0$, il faut supposer de plus que V_0 est réel et à support compact. On pourrait prendre un V_0 à support non compact mais suffisamment décroissant à l'infini pour prolonger la résolvante de $\Delta + V_0$, mais dans ce cas on remplacera la proposition 8 par le lemme 9 et on ne pourra prendre que des V à support là où le fibré des orbites principales est trivialisé.

Décrivons sur quelques exemples comment $\mathbb{S}^1$ agit, pourquoi l'hypothèse D est vérifiée ainsi que la forme des potentiels isorésonants trouvés.

- Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^2)^k \times \mathbb{R}^{n-2k}$, on peut considérer l'action de $\mathbb{S}^1$ donnée par
$$\bigoplus_{i=1}^{k} R(p_i\theta) \oplus Id_{\mathbb{R}^{n-2k}},$$
où $\theta \in [0, 2\pi)$, $(p_1, \ldots, p_k) \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})^k$, et on a noté $R(\phi)$ la rotation d'angle ϕ sur $\mathbb{R}^2$. Pour la condition D, on peut remarquer que tout compact K peut être inclus dans une boule $B(0, R)$ et on peut prendre pour $\widetilde{K}$ une boule plus grande $B(0, \widetilde{R})$, $\widetilde{R} > R$, muni de la métrique suivante donnée en coordonnées polaires :
$$\widetilde{g} = \mathrm{d}r^2 + f(r)\mathrm{d}\omega^2, \quad (r, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1},$$
où $\mathrm{d}\omega^2$ est la métrique sur la sphère de $\mathbb{R}^n$ induite par la métrique euclidienne et f est lisse sur $[0, \widetilde{R}]$, constante près de $\widetilde{R}$ et $f(r) = r^2$ sur $[0, R]$.

Les composantes $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids m des potentiels isorésonants du théorème 4 sont de la forme :

$$V_m(r_1e^{i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},z) = \sum_{\substack{(\ell_1,\dots,\ell_k)\in\mathbb{Z}^k \\ \sum_{i=1}^k \ell_i p_i = -m}} W_{m,\ell_1,\dots,\ell_k}(\bar{x})e^{i\ell_1\alpha_1}\dots e^{i\ell_k\alpha_k},$$

où $(r_1e^{i\alpha_1},\dots,r_ke^{i\alpha_k},z)\in(\mathbb{R}^2)^k\times\mathbb{R}^{n-2k}$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n/\mathbb{S}^1$ et la somme converge en norme infinie.

- Pour l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, on peut prendre le modèle de Poincaré, c'est-à-dire la boule unité de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine munie de la métrique $\frac{4g_{euclid}}{(1-\|x\|^2)^2}$. L'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ décrite précédemment induit alors une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{H}^n$. Pour la condition D, si K est inclus dans une boule de rayon R centrée en l'origine (dans ce modèle $0_{\mathbb{R}^n}$), on prend pour $\widetilde{K}$ une boule de rayon $\widetilde{R}>R$ et, en coordonnées polaires, $\widetilde{g}=\mathrm{d}r^2+f(r)\mathrm{d}\omega^2$ avec cette fois $f(r)=\mathrm{sh}^2(r)$ sur $[0,R]$. Les composantes $\mathbb{S}^1$ homogènes des potentiels isorésonants prennent alors la même forme que dans le cas euclidien. On rappelle ([GZ95a]) que si n est impair $\mathrm{Res}(\Delta)=\emptyset$ et que si n est pair $\mathrm{Res}(\Delta)=-\mathbb{N}$ et chaque entier $-k$ a pour multiplicité celle de $k(k+n-1)$ en tant que valeur propre du laplacien sur la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$.
- Cette fois considérons $\mathbb{H}^n$ en utilisant le modèle $\mathbb{R}^+_*\times\mathbb{R}^{n-1}$ muni des coordonnées (x,y) correspondantes. On prend pour variété X le cylindre hyperbolique $\mathbb{H}^n/{<}\gamma{>}$ où γ est l'isométrie $w\to e^{\ell}w$. $\mathbb{S}^1$ agit isométriquement sur X par $e^{i\theta}.[x,y]=[e^{\frac{\ell\theta}{2\pi}}x,e^{\frac{\ell\theta}{2\pi}}y]$. On peut voir X comme $\mathbb{R}^+\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^{n-2}$ avec les coordonnées (r,θ,ω) correspondantes, muni de la métrique $\mathrm{d}r^2+\mathrm{ch}^2(r)\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{sh}^2(r)\mathrm{d}\omega^2$ et l'action de $\mathbb{S}^1$ est alors l'action triviale sur le facteur $\mathbb{S}^1$. Tout compact de X est inclus dans un $K=[0,R]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^{n-2}$, on peut donc prendre $\widetilde{K}=[0,\widetilde{R}]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^{n-2}$ avec $\widetilde{R}>R$, la métrique $\widetilde{g}=\mathrm{d}r^2+h_1(r)\mathrm{d}\theta^2+h_2(r)\mathrm{d}\omega^2$ où h_1 et h_2 sont lisses sur $[0,\widetilde{R}]$, constantes près de $\widetilde{R}$ et prenant les valeurs $h_1(r)=\mathrm{ch}^2(r)$, $h_2(r)=\mathrm{sh}^2(r)$ pour $r\in[0,R]$. Les composantes $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids m des potentiels isorésonants sont de la forme :

$$V_m(r,\theta,\omega)=W_m(r,\omega)e^{-im\theta},\quad (r,\theta,\omega)\in\mathbb{R}^+\times S^1\times\mathbb{S}^{n-2}.$$

On rappelle ([GZ95a]) que pour cet exemple $\mathrm{Res}(\Delta)=-\mathbb{N}+i\mathbb{Z}2\pi/\ell$.

3.1.2 Majoration de la résolvante sur les espaces de symétrie

Grâce à l'hypothèse D, on va utiliser la proposition 8 pour démontrer le lemme suivant. On rappelle qu'on note P_j la projection de $L^2(X)$ sur $L^2_j(X)$ et on se place dans le cadre des hypothèses du théorème 4.

Lemme 10 *Soit $\lambda\in D_N^+\setminus\mathrm{Res}(\Delta)$ et $\chi\in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$. Alors il existe une constante $C=C(\lambda,\chi)>0$ telle que pour tout $j\in\mathbb{Z}$,*

$$\|\chi\widetilde{R}_0(\lambda)P_j\chi\|\leq\frac{C}{1+j^2}$$

Preuve : comme $\mathbb{S}^1$ agit isométriquement sur X, on a, pour tout j, $\Delta P_j = P_j \Delta$ et $P_j \widetilde{R}_0 = \widetilde{R}_0 P_j$. Comme χ est supposée $\mathbb{S}^1$ invariante, on a aussi $\chi P_j = P_j \chi$.

On a

$$\chi(\Delta - f(\lambda))\widetilde{R}_0(\lambda)\chi = \chi^2,$$

d'où

$$(\Delta - f(\lambda))\chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_j \chi = \chi^2 P_j + [\Delta, \chi]\widetilde{R}_0(\lambda)\chi P_j,$$

et donc

$$\| (\Delta - f(\lambda))\chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_j \chi \| \leq \| \chi^2 P_j \| + \| [\Delta, \chi]\widetilde{R}_0(\lambda)\chi P_j \| \leq C(\lambda, \chi). \tag{3.1}$$

Soit $(\widetilde{K}, \widetilde{g})$ le compact contenant $K := \mathrm{supp}\chi$ dont l'existence est assurée par l'hypothèse D. Si $v \in L^2(X)$ alors $u = \chi P_j \widetilde{R}_0(\lambda)\chi v$ appartient à $L^2_j(K, g)$ et, comme supp $u \subset K$ et que $\widetilde{g}_{|K} = g_{|K}$, on a aussi $u \in L^2_j(\widetilde{K}, \widetilde{g})$. De plus, u est à la fois dans le domaine du laplacien de Dirichlet sur $\widetilde{K}$, dans le domaine du laplacien de Dirichlet sur K et dans celui du laplacien sur X et on a

$$\Delta_{(\widetilde{K},\widetilde{g})} u = \Delta_{(K,g)} u = \Delta_{(X,g)} u.$$

Considérons une base orthonormée (ϕ_k) de $L^2_j(\widetilde{K}, \widetilde{g})$ constituée de fonctions propres de $\Delta_{(\widetilde{K},\widetilde{g})}$. On note $\mu_k(j, \widetilde{K})$ la valeur propre correspondant à ϕ_k. Si on décompose u selon cette base, $u = \sum_k u_k \phi_k$, on a

$$\big(\Delta_{(\widetilde{K},\widetilde{g})} - f(\lambda)\big)u = \sum_k \big(\mu_k(j, \widetilde{K}) - f(\lambda)\big) u_k \phi_k,$$

et donc

$$\| \big(\Delta - f(\lambda)\big)u \|^2 = \sum_k |\mu_k(j, \widetilde{K}) - f(\lambda)|^2 |u_k|^2 \geq \sum_k \big(\mu_k(j, \widetilde{K}) - \mathrm{Re}(f(\lambda))\big)^2 |u_k|^2 .$$

Le compact $(\widetilde{K}, \widetilde{g})$ est donné par l'hypothèse D, il vérifie donc les hypothèses de la proposition 8 et donc il existe une constante $C = C(\widetilde{K}) > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \ \ \mu_k(j, \widetilde{K}) \geq C j^2.$$

Prenons J tel que $CJ^2 > \mathrm{Re}(f(\lambda))$ et alors, pour tout $|j| \geq J$, on a

$$\| \big(\Delta - f(\lambda)\big)u \|^2 \geq \big(Cj^2 - \mathrm{Re}(f(\lambda))\big)^2 \sum_k |u_k|^2 = \big(Cj^2 - \mathrm{Re}(f(\lambda))\big)^2 \|u\|^2 .$$

Alors, en utilisant l'inégalité (3.1) on obtient, pour tout $|j| \geq J$,

$$\| \chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_j \chi \| \leq \frac{C(\lambda, \chi)}{Cj^2 - \mathrm{Re}(f(\lambda))}.$$

Donc il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $|j| \geq J$, $\| \chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_j \chi \| \leq \frac{C}{j^2}$, et quitte à prendre C plus grande on a bien, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\| \chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_j \chi \| \leq \frac{C}{1 + j^2} \quad \square$$

3.1.3 Localisation des résonances

On va maintenant démontrer le théorème 4 en commençant par l'inclusion $\mathrm{Res}(\Delta+V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$. Pour cela, on considère dans un premier temps les sommes partielles tronquées de V. Puis on passera à V entier, et enfin on fera l'autre inclusion.

Localisation des résonances pour les sommes partielles tronquées de V

On considère les sommes partielles de V, $S_M = \sum_{m=1}^{M} V_m$ où V_m est la composante $\mathbb{S}^1$ homogène de poids m de V. Soit $\chi \in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$, on va montrer que $\mathrm{Res}(\Delta + \chi S_M) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$, sur D_N^+.

Pour $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ on a

$$\big(\Delta + \chi S_M - f(\lambda)\big)\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N = \rho^N\big(I + \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big).$$

On peut écrire

$$\rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N = \chi\rho^{-2N} S_M \rho^N \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N.$$

Grâce à l'hypothèse $A_{N,\rho}$, $\rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ est donc une famille d'opérateurs compacts holomorphe sur $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. De plus si on prend $|\lambda|$ assez grand dans D_N^+, on a

$$\| \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \| < 1.$$

Alors en appliquant la théorie de Fredholm analytique ([RS80]), on obtient que $\big(I+\rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)^{-1}$ est méromorphe finie sur $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ et on a l'équation dite de Lipmann-Schwinger reliant la résolvante de $\Delta + \chi S_M$ à celle du laplacien libre :

$$\rho^N \widetilde{R}_{\chi S_M}(\lambda)\rho^N = \rho^N \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big(I + \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)^{-1}.$$

Ainsi, si λ_0 est un pôle de $\widetilde{R}_{\chi S_M}$ dans $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, alors λ_0 est un pôle de $\big(I + \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)^{-1}$ et toujours grâce à la théorie de Fredholm, il existe un $u \in L^2(X)$ non trivial qui vérifie

$$\big(I + \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)u = 0.$$

On remarque avec cette égalité que le support de u est inclus dans le support de χ. Prenons un $\chi_2 \in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$ et telle que $\chi_2 = 1$ sur le support de χ. Alors, en notant $u_j := P_j u \in L_j^2(X)$, on a

$$u_j = P_j\big(- \rho^{-N}\chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N u\big) = P_j\big(- \rho^{-N}\chi S_M \chi_2 \widetilde{R}_0(\lambda)\chi_2\rho^N u\big),$$

et par linéarité

$$u_j = -\sum_{m=1}^{M} P_j\big(\rho^{-N}\chi V_m \chi_2 \widetilde{R}_0(\lambda)\chi_2 \rho^N u\big).$$

On rappelle (cf lemme 3) que V_m induit, par multiplication, le décalage suivant

$$V_m : L^2_j(X) \to L^2_{j+m}(X).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_j &= -\sum_{m=1}^{M} V_m P_{j-m}\big(\rho^{-N}\chi\chi_2\widetilde{R}_0(\lambda)\chi_2\rho^N u\big) \\ u_j &= -\sum_{m=1}^{M} V_m\rho^{-N}\chi\chi_2\widetilde{R}_0(\lambda)\chi_2\rho^N P_{j-m}(u), \end{aligned}$$

où on a aussi utilisé que les projections P_{j-m} commutent avec $\widetilde{R}_0$ car l'action de $\mathbb{S}^1$ est isométrique et avec ρ, χ et χ_2 grâce à leur invariance sous $\mathbb{S}^1$.

Par hypothèse, pour tout m, $\| V_m \|_\infty \leq \sum_{m'=1}^{+\infty} \| V_{m'} \|_\infty < +\infty$, donc les $V_m\rho^{-N}\chi\chi_2\widetilde{R}_0(\lambda)\chi_2\rho^N$ sont des opérateurs uniformément bornés en m. Donc il existe une constante C telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\| u_j \| \leq C \sum_{m=1}^{M} \| u_{j-m} \| .$$

De plus en appliquant le lemme 10 à $\chi_2\widetilde{R}_0\chi_2 P_{j-m}$, on obtient aussi qu'il existe une constante qu'on notera encore C telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\| u_j \| \leq \sum_{m=1}^{M} \frac{C}{1+(j-m)^2} \| u_{j-m} \|,$$

et donc, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\| u_j \| \leq \epsilon_j \sum_{m=1}^{M} \| u_{j-m} \|,$$

avec $\epsilon_j \to 0$ pour $| j | \to +\infty$.

On va avoir besoin du lemme suivant

Lemme 11 *Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite à termes positifs de $\ell^1(\mathbb{Z})$. S'il existe $M \in \mathbb{N}$ et si, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $a_j \leq \epsilon_j \sum_{m=1}^{M} a_{j-m}$ avec $\epsilon_j \to 0$ pour $| j | \to +\infty$, alors $a_j = 0$ pour tout j.*

Preuve : soit $J' \leq 0$ tel que, pour tout $j \leq J'$, $\epsilon_j \leq \frac{1}{M}$. Alors, pour tout $j \leq J'$, on a $a_j \leq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} a_{j-m}$ et si on somme ces relations on obtient, en notant $S = \sum_{j\leq J'} a_j$,

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{M}\big((S - a_{J'}) + (S - a_{J'} - a_{J'-1}) + \ldots + (S - a_{J'} - \ldots - a_{J'-M+1})\big) \\ &= \frac{1}{M}\big(MS - Ma_{J'} - (M-1)a_{J'-1} - \ldots - a_{J'-M+1}\big). \end{aligned}$$

On en déduit

$$0 \leq -Ma_{J'} - (M-1)a_{J'-1} - \ldots - a_{J'-M+1},$$

et donc

$$a_{J'} = a_{J'-1} = \ldots = a_{J'-M+1} = 0.$$

Comme on a $\epsilon_j \to 0$ pour $|j| \to +\infty$, il existe une constante C telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $a_j \leq C \sum_{m=1}^{M} a_{j-m}$, on obtient donc

$$\forall j \geq J' - M + 1, \ \ a_j = 0.$$

En faisant tendre J' vers $-\infty$ on a finalement $a_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. $\square$

On peut appliquer ce lemme 11 à la suite $\{\| u_j \|^2\}_j$. On obtient $\| u_j \| = 0$ pour tout j et donc $u \equiv 0$ ce qui contredit l'existence d'un pôle de $\widetilde{R}_{\chi S_M}$ en dehors de $\mathrm{Res}(\Delta)$.

Donc, finalement, pour tout M et toute fonction $\chi \in C_c^\infty(X)$, invariante sous $\mathbb{S}^1$, $\Delta + \chi S_M$ n'a pas de résonance sur $D_N^+ \backslash \mathrm{Res}(\Delta)$: c'est-à-dire $\mathrm{Res}(\Delta + \chi S_M) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$, sur D_N^+.

Localisation des résonances pour V

Dans ce paragraphe, on va passer des sommes partielles tronquées de V à V tout entier et montrer que, sur D_N^+, on a $\mathrm{Res}(\Delta + V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$. Pour ce faire, on va utiliser les déterminants régularisés dont on donne une définition.

Définition 5 *Pour un opérateur $A \in \mathcal{S}_p$, $1 \leq p < \infty$, on définit son* ***déterminant régularisé****, $\det_p$, par*

$$\det_p(I + A) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n(A)) \exp\big(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k} \lambda_n^k(A)\big),$$

où les $(\lambda_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ sont les valeurs propres de A.

Donnons quelques propriétés de ce déterminant qu'on peut trouver dans [Yaf92] par exemple.

Proposition 10
1. *$A \to \det_p(I + A)$ est continue dans $(\mathcal{S}_p, \| \,.\, \|_p)$.*
2. *Si $z \to A(z)$ est holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathcal{S}_p$, alors $z \to \det_p(I + A(z))$ est holomorphe dans le même domaine.*
3. *Pour $A \in \mathcal{S}_p$, $I + A$ est inversible si et seulement si $\det_p(I + A) \neq 0$.*

Les hypothèses du théorème 4 assurent qu'il existe un entier q tel que, pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ est dans une classe de Schatten $\mathcal{S}_q$. Donc $\rho^{-N} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ est aussi dans $\mathcal{S}_q$.

Montrons que, pour toute $\chi \in C_c^\infty(X)$, il existe un entier p tel que $\chi\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \in \mathcal{S}_p$ pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. Prenons un compact K à bord lisse qui contient le support de χ. Soit Δ_K le laplacien avec condition de Dirichlet sur le bord de K, et $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de $(\Delta_K + 1)^{-1}$. Alors la loi de Weyl donne, quand k tend vers $+\infty$,

$$\mu_k \sim \frac{(2\pi)^2}{(\omega_n \mathrm{Vol}(K))^{\frac{2}{n}}} k^{-\frac{2}{n}},$$

où $n = \dim X$ et ω_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors pour $p > \frac{n}{2}$, $(\Delta_K + 1)^{-1} \in \mathcal{S}_p$. De plus, pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, $(\Delta_K + 1)\chi\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ est un opérateur borné de $L^2(X)$, et, comme $\mathcal{S}_p$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(L^2(X))$, on a

$$\chi\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N = (\Delta_K + 1)^{-1}(\Delta_K + 1)\chi\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \in \mathcal{S}_p.$$

Comme on a $\mathcal{S}_{p_1} \subset \mathcal{S}_{p_2}$, pour $p_1 \leq p_2$ ([Yaf92]), si on suppose, quitte à échanger p et q, que dans la suite $p \leq q$, alors $\chi\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ et $\rho^{-N}V\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ sont tous les deux dans $\mathcal{S}_q$.

L'équation de Lipmann-Schwinger appliquée à V au lieu de χS_M nous donne

$$\rho^N\widetilde{R}_V(\lambda)\rho^N = \rho^N\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big(I + \rho^{-N}V\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)^{-1}.$$

Donc, grâce au troisième point de la proposition 10 on a

$$\lambda \in \mathrm{Res}(\Delta + V) \cap D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta) \Longleftrightarrow \det_q\big(I + \rho^{-N}V\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big) = 0.$$

Pour $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, on définit

$$F(V, \lambda) := \det_q\big(I + \rho^{-N}V\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big).$$

Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta + V) \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, alors

$$F(V, \lambda_0) = 0.$$

Prenons Γ un lacet simple autour de λ_0 tel que λ_0 soit le seul zéro de $F(V, .)$ dans le domaine U délimité par Γ et tel que $\overline{U} \subset D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. Ce choix est possible car, grâce au deuxième point de la proposition 10, $F(V, .)$ est holomorphe et ses zéros sont donc isolés.

Soit χ_r une famille de fonctions lisses à support compact et invariantes sous l'action de $\mathbb{S}^1$ telle que $\| (\chi_r - 1)\rho \|_\infty$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. Comme on a supposé que $V\rho^{-(N+1)}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \in \mathcal{S}_q$ on peut écrire, pour tout $\lambda \in \Gamma$,

$$\| \chi_r V\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N - V\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \|_q \leq \| (\chi_r - 1)\rho \|_\infty \, \| V\rho^{-(N+1)}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \|_q .$$

Ainsi, quand r tend vers $+\infty$, $\chi_r V\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ tend vers $V\rho^{-N}\widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N$ dans $\mathcal{S}_q$ uniformément en λ sur Γ. Donc d'après le premier point de la proposition 10, on a $F(\chi_r V, \lambda) \to F(V, \lambda)$ uniformément sur Γ. On en déduit qu'il existe r_0 tel que pour tout $r > r_0$ et pour tout $\lambda \in \Gamma$ on a

$$| F(\chi_r V, \lambda) - F(V, \lambda) | < | F(V, \lambda) | .$$

Donc en utilisant le théorème de Rouché on sait que $F(\chi_r V,.)$ a le même nombre de zéros dans U que $F(V,.)$.

De la même manière, fixons $r > r_0$, et comme $\chi_r \rho^{-N} \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \in \mathcal{S}_q$ on a

$$\| \chi_r S_M \rho^{-N} \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N - \chi_r V \rho^{-N} \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \|_q \leq \| S_M - V \|_\infty \| \chi_r \rho^{-N} \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N \|_q .$$

Or dans les hypothèses du théorème 4 on a que $\| S_M - V \|_\infty$ tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$. Donc on obtient que $F(\chi_r S_M, \lambda) \to F(\chi_r V, \lambda)$ uniformément sur Γ, et on peut ré-appliquer le théorème de Rouché.

Finalement on a montré qu'il existe r et M tels que $F(\chi_r S_M,.)$ a le même nombre de zéros dans U que $F(V,.)$. Comme on a supposé qu'il existait λ_0 un zéro de $F(V,.)$ dans U cela signifie que $F(\chi_r S_M,.)$ a au moins un zéro dans U et donc, en utilisant l'équation de Lipmann-Schwinger, que $\Delta + \chi_r S_M$ a une résonance dans $U \subset D_N^+ \setminus \operatorname{Res}(\Delta)$. Cette dernière affirmation contredit le résultat de la section précédente. En conclusion, sur D_N^+, on a montré que

$$\operatorname{Res}(\Delta + V) \subset \operatorname{Res}(\Delta).$$

Un autre argument pour localiser les résonances

Dans ce paragraphe je vais décrire une autre façon de montrer que, sur D_N^+, $\operatorname{Res}(\Delta + V) \subset \operatorname{Res}(\Delta)$. Cet argument n'utilise plus explicitement le décalage créé par les composantes $\mathbb{S}^1$ homogènes de V mais il utilise les déterminants régularisés et bien sûr l'action de $\mathbb{S}^1$. Il est dû à Christiansen ([Chr08]).

On considère $W(z) := \sum_{m=1}^{\infty} z^m V_m$ dont on suppose qu'il vérifie les hypothèses du théorème 4 et donc il est holomorphe pour $z \in D(0,1)$, le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon 1. Déjà, on peut remarquer que $W(1) = V$ et que, grâce à l'homogénéité des V_m, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $W(re^{i\theta}) = e^{i\theta}.W(r)$. On rappelle que pour toute fonction f définie sur X, on note $e^{i\theta}.f$ l'application qui à $x \in X$ associe $f(e^{-i\theta}.x)$. Donc en tant qu'opérateur de multiplication sur $L^2(X)$ on a $W(re^{i\theta}) = R_\theta^* W(r)(R_\theta^{-1})^*$ où on note R_θ^* l'opérateur qui a une fonction $f \in L^2(X)$ associe $e^{i\theta}.f$. Pour $\lambda \in D_N^+ \setminus \operatorname{Res}(\Delta)$ et $z \in D(0,1)$, on considère

$$H(z,\lambda) := \det_q\big(I + \rho^{-N} W(z) \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big).$$

$H(.,\lambda)$ est holomorphe sur $D(0,1)$. Comme l'action de $\mathbb{S}^1$ est isométrique, les R_θ commutent avec $\widetilde{R}_0(\lambda)$ et avec ρ, donc, avec la remarque faite sur $W(re^{i\theta})$, $H(.,\lambda)$ est constante sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Elle est donc constante sur $D(0,1)$ et on en déduit par continuité que $H(1,\lambda) = H(0,\lambda) = 1$, c'est-à-dire que $\det_q\big(I + \rho^{-N} V \widetilde{R}_0(\lambda)\rho^N\big)$ ne s'annule pas pour $\lambda \in D_N^+ \setminus \operatorname{Res}(\Delta)$, c'est-à-dire $\operatorname{Res}(\Delta + V) \subset \operatorname{Res}(\Delta)$.

3.1.4 Persistance des résonances du laplacien libre

Montrons que, sur D_N^+, les résonances du laplacien libre restent des résonances de $\Delta + V$, c'est-à-dire que $\operatorname{Res}(\Delta) \subset \operatorname{Res}(\Delta + V)$ et que leur multiplicité est conservée. Pour ce faire on va utiliser la théorie des perturbations des résonances d'Agmon décrite dans l'annexe pour se ramener à un problème de valeurs propres.

Soit $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta)$ de multiplicité m. Considérons un domaine $U \subset D_N^+$ de bord lisse Γ tel que $\overline{U} \cap \mathrm{Res}(\Delta) = \{\lambda_0\}$. Si le potentiel V vérifie les hypothèses du théorème 4 alors, pour tout $t \geq 0$, tV vérifient encore ces hypothèses. On peut donc appliquer la section précédente : on a, pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{Res}(\Delta+tV) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$ et donc

$$\mathrm{Res}(\Delta + tV) \cap U \subset \{\lambda_0\}.$$

Introduisons l'ensemble suivant

$$E := \{t_0 \geq 0 \ ; \ \forall t \in [0, t_0], \ \mathrm{Res}(\Delta + tV) \cap U = \{\lambda_0\} \ \text{ avec la multiplicité } m\},$$

dont on va montrer par connexité qu'il est égal à $[0, +\infty[$. Déjà il est non vide car par définition de λ_0, $0 \in E$.

Soit $t_0 \in E$, on va montrer, grâce à la théorie d'Agmon qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset E$. On commence par définir le Banach

$$B_\Gamma = \{f \in \rho^{-N} L^2(X) \ ; \ f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}_{t_0 V}(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi, \ \ g \in \rho^N L^2(X), \Phi \in C(\Gamma, \rho^N L^2(X))\},$$

où $C(\Gamma, \rho^N L^2(X))$ est l'espace des fonctions continues sur Γ à valeurs dans $\rho^N L^2(X)$. L'espace B_Γ est muni de la norme

$$\| f \|_{B_\Gamma} = \inf_{g,\Phi} (\| g \|_{\rho^N L^2(X)} + \| \Phi \|_{C(\Gamma, \rho^N L^2(X))}),$$

où l'infimum est pris sur toutes les $g \in \rho^N L^2(X)$ et les $\Phi \in C(\Gamma, \rho^N L^2(X))$ telles que $f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}_{t_0 V}(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi$. Sur B_Γ on peut définir, en suivant l'annexe, l'opérateur $(\Delta + t_0 V)^\Gamma$. Le théorème 10 de l'annexe précise que $(\Delta + t_0 V)^\Gamma$ a un spectre discret dans U qui est exactement l'ensemble des pôles de $\widetilde{R}_{t_0 V}$ avec les mêmes multiplicités.

Ensuite, dans la dernière partie de l'annexe, on verra que la famille tV vérifie les hypothèses (δ) de l'annexe et qu'on peut donc perturber $\Delta + t_0 V$ par tV. Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, on peut définir sur B_Γ l'opérateur $(\Delta + t_0 V + tV)^\Gamma$. Alors le théorème 13 de l'annexe, nous apprend que, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $(\Delta + t_0 V + tV)^\Gamma$ a un spectre discret dans U qui est exactement l'ensemble des pôles de $\widetilde{R}_{t_0 V + tV}$ avec les mêmes multiplicités.

Maintenant, on est ramené à un problème de valeurs propres. Grâce à la théorie de Kato ([Kat66]), on sait, quitte à avoir choisi δ assez petit, que les valeurs propres de $(\Delta + t_0 V + tV)^\Gamma$ dans U sont continues pour tout $t \in]-\delta, \delta[$. Comme ces valeurs propres sont aussi les résonances de $\Delta + t_0 V + tV$ dont on a vu qu'elles ne pouvaient exister en dehors de λ_0, λ_0 est donc l'unique valeur propre dans U de $(\Delta + t_0 V + tV)^\Gamma$, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, et elle est de multiplicité constante . Donc, grâce à notre correspondance, λ_0 est l'unique résonance dans U de $\Delta + t_0 V + tV$, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, et elle est de multiplicité constante. C'est-à-dire $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset E$ et E est donc ouvert.

Pour montrer que E est fermé on refait le même raisonnement sur le complémentaire de E. Si $t_0 > 0$ n'appartient pas à E, alors λ_0 est une résonance de multiplicité strictement inférieure à m (peut-être nulle) de $\Delta + t_0 V$. En perturbant cet opérateur par tV et en utilisant la correspondance d'Agmon, on montre comme précédemment que λ_0 reste une résonance de multiplicité strictement inférieure à m de $\Delta + tV$ pour t dans un voisinage de t_0.

Donc finalement $E = [0, +\infty[$ et on peut prendre $t_0 = 1$ pour obtenir que dans U, $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec la même multiplicité. On peut refaire ce dernier raisonnement au voisinage de chacune des résonances du laplacien libre et obtenir que sur tout D_N^+ on a bien $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.

3.1.5 Un exemple de croissance de l'ordre des résonances

Les potentiels isorésonants introduits dans le théorème 4 ne peuvent pas être détectés par la seule donnée de l'ensemble des résonances et de leur multiplicité. On peut alors se demander si leur présence peut se voir sur l'ordre des résonances. On va montrer sur un exemple qu'il existe des potentiels vérifiant le théorème 4 qui modifient l'ordre des résonances.

On se place sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, avec comme modèle $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ avec les coordonnées (r, θ) et la métrique $g = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{sh}(r)^2 \mathrm{d}\theta^2$. On a déjà signalé ([GZ95a]) que les résonances du laplacien libre sont tous les entiers négatifs ou nuls et que la multiplicité de $-k$, $k \in \mathbb{N}$, est celle de $k(k+1)$ en tant que valeur propre du laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^2$ c'est-à-dire $2k+1$. De plus ces résonances sont d'ordre 1. Soit $\mathcal{F} := \{V_m(r)e^{im\theta}; m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, V_m \in L_c^\infty(\mathbb{R}^+)\}$, c'est une famille de potentiels isorésonants d'après le théorème 4. Dans ce cadre on va montrer le résultat suivant :

Proposition 11 *Sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un potentiel $V \in \mathcal{F} := \{V_m(r)e^{im\theta}; m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, V_m \in L_c^\infty(\mathbb{R}^+)\}$ tel que $-k$ est une résonance de $\Delta + V$ d'ordre strictement plus grand que* 1.

Preuve : Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, supposons par l'absurde que, pour tout $V \in \mathcal{F}$, $-k$ reste une résonance d'ordre 1 de $\Delta + V$.

Pour tout $V \in \mathcal{F}$, la résolvante $(\Delta + V - \lambda(1-\lambda))^{-1}$ admet un prolongement $\widetilde{R}_V$ méromorphe sur $D_N^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda > \frac{1}{2} - N\}$ contenant $-k$ si N est assez grand, et ce en tant qu'opérateur de $B_0 := \rho^N L^2(\mathbb{H}^2)$ sur $B_1 := \rho^{-N} L^2(\mathbb{H}^2)$ où ρ est une fonction définissant le bord d'une compactification de $\mathbb{H}^2$. B_0 et B_1 sont duaux l'un de l'autre grâce à la forme symétrique et non dégénérée :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{H}^n} uv \, \mathrm{dvol}(g).$$

On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $V \in \mathcal{F}$, on a $tV \in \mathcal{F}$. D'après notre hypothèse, pour λ dans un voisinage de $-k$, on a

$$\widetilde{R}_{tV}(\lambda) = (\lambda + k)^{-1} S(t) + H(t, \lambda),$$

avec $H(t,.)$ holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$ et $S(t)$ opérateur de rang fini dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$.

Appliquons la théorie des perturbations d'Agmon (voir l'annexe). Considérons un domaine $U \subset D_N^+$ de bord lisse Γ tel que $\overline{U} \cap \mathrm{Res}(\Delta) = \{-k\}$. On définit alors le Banach B_Γ correspondant

$$B_\Gamma = \{f \in B_1\ ;\ f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}_0(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \ g \in B_0, \Phi \in C(\Gamma, B_0)\}.$$

On a $B_0 \subset B_\Gamma \subset B_1$.

Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $V \in \mathcal{F}$ et tout $t \in]-\delta, \delta[$, on peut définir les opérateurs $(\Delta + tV)^\Gamma$ sur B_Γ et leur résolvante R_{tV}^Γ. Le théorème 13 de l'annexe dit que $(\Delta + tV)^\Gamma$ a un spectre discret dans U et qu'il correspond aux résonances de $\Delta + tV$ dans U avec les mêmes multiplicités et **ordres**. Donc pour λ proche de $-k$ dans U on a

$$R_{tV}^\Gamma(\lambda) = (\lambda + k)^{-1} S^\Gamma(t) + H^\Gamma(t, \lambda), \tag{3.2}$$

avec $H^\Gamma(t,.)$ holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(B_\Gamma)$ et $S^\Gamma(t)$ opérateur de rang fini dans $\mathcal{L}(B_\Gamma)$. De plus on sait, avec la proposition 16 de l'annexe, que $S(t)$ et $S^\Gamma(t)$ ont la même image et qu'ils coïncident sur B_0.

Soit $V \in \mathcal{F}$, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ et $\phi \in B_\Gamma$ on pose $\psi(t) := S^\Gamma(t)\phi$. De (3.2) on tire pour tout $t \in]-\delta, \delta[$,

$$((\Delta + tV)^\Gamma + k(k+1))\psi(t) = 0.$$

$\psi(t)$ est dérivable en t comme $S^\Gamma(t)$ (car $S^\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\Delta^\Gamma + tV - \lambda(1-\lambda))^{-1} d\lambda$), donc on peut dériver cette dernière égalité en $t = 0$ et obtenir

$$V\psi(0) + (\Delta^\Gamma + k(k+1))\psi'(0) = 0.$$

Appliquons $S^\Gamma(0)$ à cette dernière égalité. En utilisant, $S^\Gamma(0)(\Delta^\Gamma + k(k+1)) = (\Delta^\Gamma + k(k+1))S^\Gamma(0) = 0$, car

$$S^\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\Delta^\Gamma - \lambda(1-\lambda))^{-1} d\lambda,$$

et que $-k(k+1)$ est une valeur propre d'ordre 1 de Δ^Γ, on obtient

$$S^\Gamma(0)V\psi(0) = 0.$$

Comme $\psi(0) \in \mathrm{Ran}\ S^\Gamma(0) = \mathrm{Ran}\ S(0)$, il existe $f_0 \in B_0$ telle que $\psi(0) = S(0)f_0 = S^\Gamma(0)f_0$. De plus $S^\Gamma(0)V\psi(0) \in B_\Gamma \subset B_1$, on peut évaluer :

$$\langle S^\Gamma(0)V\psi(0), f_0\rangle = 0.$$

Ensuite, comme le laplacien est un opérateur réel, il est symétrique pour $\langle .,. \rangle$ et donc la résolvante, $\widetilde{R}_0(\lambda)$, aussi, d'abord pour $\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$ puis sur tout D_N^+ par prolongement analytique. Finalement $S^\Gamma(0)$ est symétrique pour $\langle .,. \rangle$. Donc

$$\langle V\psi(0), S^\Gamma(0)f_0\rangle = \langle V\psi(0), \psi(0)\rangle = 0,$$

et ce pour tout $V \in \mathcal{F}$.

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et tout $V_m \in L^\infty_c(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \int_{\mathbb{R}^+} V_m(r)\psi(0)^2(r,\theta)\mathrm{dvol}(g) = 0.$$

Ce qui implique que pour tous les états résonants $\psi(0)$ du laplacien libre, $\psi(0)^2$ ne dépend pas de θ. Or, en considérant l'expression du laplacien hyperbolique et en prenant sa décomposition selon $\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}}(L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{sh}r\mathrm{d}r) \otimes e^{i\ell\theta})$, on obtient des états résonants de la forme $\psi(0)(r,\theta) = \psi_\ell(r)e^{i\ell\theta}$ avec $|\,\ell\,| \leq k$ et ψ_ℓ des fonctions hypergéométriques (voir l'annexe de [GZ95b]) et alors, pour $\ell \neq 0$, $\psi(0)^2$ va dépendre de θ d'où une contradiction.

Donc il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $-k$ soit une résonance de $\Delta + V$ d'ordre strictement plus grand que 1. $\square$

3.2 Actions de $(\mathbb{S}^1)^m$

3.2.1 Énoncé du résultat

On considère cette fois une variété riemannienne (X,g) qui possède une action isométrique de $(\mathbb{S}^1)^m$. On rappelle qu'on a la décomposition en composantes isotypiques suivante :

$$L^2(X) = \bigoplus_{(j_1,\dots,j_m)\in\mathbb{Z}^m} L^2_{j_1,\dots,j_m}(X).$$

On rappelle qu'on note $\underline{j} := (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}^m$ et $P_{\underline{j}}$ la projection sur $L^2_{\underline{j}}(X)$. On adapte l'hypothèse D à l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ sans en changer le contenu,

Hypothèse D' : pour tout compact $K \subset X$ il existe une variété compacte à bord $\widetilde{K}$ difféomorphe à un compact de X contenant K, possédant une action de $(\mathbb{S}^1)^m$, munie d'une métrique lisse $\widetilde{g}$ telle que $\widetilde{g}_{|K} = g_{|K}$. On suppose aussi que $\widetilde{g}$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{d}\delta^2 + \widetilde{h}_{\partial\widetilde{K}}$ dans un voisinage du bord $\partial\widetilde{K}$ de $\widetilde{K}$, avec δ une fonction $(\mathbb{S}^1)^m$ invariante définissant le bord de $\widetilde{K}$ et $\widetilde{h}$ indépendante de δ et enfin telle que l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ sur $(\widetilde{K}, \widetilde{g})$ soit isométrique.

Le théorème suivant donne des potentiels isorésonants construits grâce à l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$.

Théorème 5 *Soit (X,g) une variété riemannienne qui possède une action isométrique de $(\mathbb{S}^1)^m$ vérifiant l'hypothèse D'. On suppose que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ est vérifiée pour un $N > 0$ et une fonction ρ invariante sous l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ et qu'on a donc un prolongement méromorphe-fini de la résolvante du laplacien libre sur* *un domaine* D_N^+.

Soit V *le potentiel*

$$V = \sum_{i=1}^{+\infty} V_{\omega_i},$$

où, pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, on a* $\omega_i \in \mathbb{Z}^m$ *et il existe* $h \in \mathbb{R}^m$ *tel que* $\langle h, \omega_i \rangle > 0$ *(produit scalaire euclidien) pour tout* i*. De plus on suppose que, pour tout* i*,* $V_{\omega_i} \in L^2_{\omega_i}(X)$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \| V_{\omega_i} \|_\infty < +\infty$*. Si* V *vérifie aussi l'hypothèse* $B_{N,\rho}$*, et si pour tout* $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$*,* $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ *est dans une classe de Schatten* $\mathcal{S}_q$*,* $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,*

alors, sur D_N^+*, on a* $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ *et les multiplicités coïncident.*

Comme premiers exemples de variétés sur lesquelles on peut construire de tels potentiels, on peut citer l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ avec $n \geq 2m$. En effet, on peut voir $\mathbb{R}^n$ comme $\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{n-2m}$ et prendre comme action de $(\mathbb{S}^1)^m$

$$\bigoplus_{k=1}^{m} R(\theta_k) \oplus Id_{\mathbb{R}^{n-2m}},$$

où $\theta_k \in [0, 2\pi)$ et on a noté $R(\phi)$ la rotation d'angle ϕ sur $\mathbb{R}^2$. On peut prendre la même action de $(\mathbb{S}^1)^m$ sur $\mathbb{H}^n$ en considérant le modèle de Poincaré. Pour la condition D', elle est vérifiée de la même façon que dans le cas de $\mathbb{S}^1$.

On pourrait aussi perturber $\Delta + V_0$ au lieu de Δ avec un V_0 invariant sous l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$. On a alors les mêmes restrictions que dans le cas de $\mathbb{S}^1$, c'est-à-dire que V_0 est soit à support compact, soit il est suffisamment décroissant à l'infini sans être à support compact, mais dans ce dernier cas on ne peut prendre que des V à support là où le fibré des orbites principales est trivial.

Avant de prouver le théorème 5 en utilisant les décalages induits par ces potentiels sur les espaces de symétrie, établissons les liens qui existent entre l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ et l'action de $\mathbb{S}^1$.

3.2.2 Comparaison avec l'action de $\mathbb{S}^1$

Tout d'abord si $(\mathbb{S}^1)^m$ agit sur X de manière isométrique alors c'est aussi le cas de $\mathbb{S}^1$. Il suffit de restreindre l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$, en posant par exemple, pour $\alpha \in [0, 2\pi)$ et $x \in X$,

$$e^{i\alpha}.x = (e^{ip_1\alpha}, \ldots, e^{ip_m\alpha}).x,$$

avec $(p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{Z}^m$ qu'on peut choisir. En fait, grâce à cette remarque, on peut démontrer le théorème 5 en se servant uniquement de ce qui a déjà été fait précédemment avec l'action de $\mathbb{S}^1$. En effet, pour la localisation des résonances de $\Delta + V$ dans $D_N^+ \cap \mathrm{Res}(\Delta)$, on peut, comme dans le cas de $\mathbb{S}^1$, utiliser les déterminants régularisés et la convergence de $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \| V_{\omega_i} \|_\infty$ pour prouver que, si

$\Delta + V$ a une résonance dans $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, alors il existe $M \geq 1$ tel que $\Delta + \sum_{i=1}^{M} V_{\omega_i}$ a aussi une résonance dans $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. On s'est donc ramené à une somme finie.

Alors il existe $h' = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq M$, $\langle h', \omega_i \rangle > 0$. On restreint alors l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ en une action de $\mathbb{S}^1$ en posant comme expliqué précédemment

$$e^{i\alpha}.x = (e^{ip_1\alpha}, \dots, e^{ip_m\alpha}).x, \quad x \in X.$$

On remarque qu'alors les V_{ω_i} sont $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids $\langle h', \omega_i \rangle$ tous strictement positifs. On peut alors se servir du décalage créé par ces potentiels sur les composantes isotypiques de $L^2(X)$ sous cette action de $\mathbb{S}^1$ pour prouver que $\Delta + \sum_{i=1}^{M} V_{\omega_i}$ ne peut pas avoir de résonance dans $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ et donc $\Delta + V$ non plus. Enfin pour montrer l'autre inclusion, c'est-à-dire $\mathrm{Res}(\Delta) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$, on utilise la théorie d'Agmon exactement comme dans le cas de $\mathbb{S}^1$.

Malgré cette preuve possible, je trouve plus satisfaisant de prouver le théorème 5 en utilisant vraiment l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$, c'est donc ce que je ferai dans la section suivante.

Le fait qu'on s'intéresse tout de même à l'action du tore réside dans le fait suivant. Les potentiels $V = \sum_{i=1}^{\infty} V_{\omega_i}$ où les ω_i sont tels que $\langle h, \omega_i \rangle > 0$ avec $h \in \mathbb{R}^m$ à coordonnées **irrationnelles** ne peuvent pas tous s'écrire comme une somme de potentiels $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids tous de même signe. L'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ permet donc de construire plus de potentiels que l'action de $\mathbb{S}^1$.

3.2.3 Preuve utilisant l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$

Établissons une preuve du théorème 5 qui utilise directement l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$. Pour cela on commence par rappeler que grâce à l'hypothèse D', on peut appliquer la proposition 9 du chapitre précédent et en déduire, comme dans le cas de $\mathbb{S}^1$, une minoration de la résolvante sur les espaces de symétrie.

On se place donc dans le cadre du théorème 5 en se donnant une famille de $(\omega_i)_{1 \leq i \leq M} \in \mathbb{Z}^m$, qui vérifie pour tout i, $\langle h, \omega_i \rangle > 0$, avec $h \in \mathbb{R}^m$ donné. Alors on a

Lemme 12 *Soit $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ et $\chi \in C_c^\infty(X)$, invariante sous l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$. Pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$, il existe une constante $C > 0$ dépendant de $\lambda, \chi, \underline{j}$ telle que, pour tout $(n_1, \dots, n_M) \in \mathbb{Z}^M$, tous de même signe, on ait*

$$\| \chi \widetilde{R}_0(\lambda) P_{\underline{j} + \sum\limits_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i} \chi \| \leq \frac{C}{1 + \sum\limits_{i=1}^{M} n_i^2}.$$

Preuve : c'est exactement la même preuve que pour le lemme 10 en utilisant la proposition 9 au lieu de 8.

Démontrons maintenant le théorème 5. On commence par étudier les sommes partielles tronquées de V, χS_M, où $\chi \in C_c^\infty(X)$ est invariante sous l'action de $(\mathbb{S}^1)^m$ et $S_M := \sum_{i=1}^{M} V_{\omega_i}$. Pour montrer que $\mathrm{Res}(\Delta + \chi S_M) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$, on est amené par la théorie de Fredholm à montrer qu'il n'y a pas de solution L^2 non nulle à l'équation

$$u = -\rho^{-N} \chi S_M \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N u, \quad \lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta).$$

On projette cette équation en notant $u_{\underline{j}} := P_{\underline{j}} u$ et en utilisant les décalages induits par les V_{ω_i} :

$$V_{\omega_i} : L^2_{\underline{j}} \to L^2_{\underline{j}+\omega_i}.$$

D'où, pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$, on a

$$u_{\underline{j}} = -\sum_{i=1}^{M} \rho^{-N} \chi V_{\omega_i} \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N u_{\underline{j}-\omega_i}. \tag{3.3}$$

Or, pour tout i, $\| V_{\omega_i} \|_\infty \leq \sum_{i'=1}^{\infty} \| V_{\omega_{i'}} \|_\infty < +\infty$, donc les $\rho^{-N} \chi V_{\omega_i} \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ sont des opérateurs uniformément (en i) bornés. Donc il existe une constante C telle que, pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$,

$$\| u_{\underline{j}} \| \quad \leq \quad C(\sum_{i=1}^{M} \| u_{\underline{j}-\omega_i} \|) \tag{3.4}$$

On veut montrer que $\| u_{\underline{j}} \| = 0$, pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$. On fixe $\underline{j}$ et on applique le lemme 12 à l'équation (3.3). On obtient que, pour tout $(n_1, \ldots, n_M) \in \mathbb{Z}^M$,

$$\| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i} \| \leq \varepsilon(n_1, \ldots, n_M) (\sum_{k=1}^{M} \| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i - \omega_k} \|),$$

où $\varepsilon(n_1, \ldots, n_M)$ tend vers 0 quand $\sum_{i=1}^{M} n_i^2$ tend vers $+\infty$. Alors il existe $L > 0$ tel que pour tout $(n_1, \ldots, n_M) \in \mathbb{Z}^M$ qu'on choisit tous négatifs et tels que $\sum_{i=1}^{M} n_i^2 \geq L$, on a

$$\| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i} \| \leq \frac{1}{CM^2} (\sum_{k=1}^{M} \| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i - \omega_k} \|),$$

où C est la constante introduite dans (3.4). Comme on a choisi les n_i tous négatifs, on peut itérer ℓ fois l'inégalité précédente (à chaque itération $\sum_{i=1}^{M} n_i^2$ croît), on obtient que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i} \| \leq (\frac{1}{CM^2})^\ell (\sum_{k_1=1}^{M} \cdots \sum_{k_\ell=1}^{M} \| u_{\underline{j} + \sum_{1 \leq i \leq M} n_i \omega_i - \sum_{1 \leq p \leq \ell} \omega_{k_p}} \|) \tag{3.5}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $(u_{\underline{j}})_{\underline{j}\in\mathbb{Z}^m} \in \ell^2(\mathbb{Z}^m)$, il existe $N > 0$ tel que, pour tout $(n_1, \dots, n_M) \in \mathbb{Z}^M$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{M} n_i^2 \geq N$,

$$\| u_{\underline{j}+\sum\limits_{1\leq i\leq M} n_i\omega_i} \| \leq \varepsilon \tag{3.6}$$

Ensuite on part de (3.4) qu'on itère T fois, cela donne

$$\| u_{\underline{j}} \| \leq C^T(\sum_{k_1=1}^{M} \dots \sum_{k_T=1}^{M} \| u_{\underline{j}-\sum\limits_{1\leq p\leq T}\omega_{k_p}} \|).$$

Si on prend T suffisamment grand, tous les termes qui apparaissent dans la somme multiple de l'inégalité précédente sont de la forme $\| u_{\underline{j}+\sum\limits_{1\leq i\leq M} n_i\omega_i} \|$ avec des n_i tous négatifs et tels que $\sum\limits_{i=1}^{M} n_i^2 \geq \max(N, L)$. On peut donc appliquer (3.5) sur chacun de ces termes, puis (3.6) pour avoir que, pour tout ℓ,

$$\| u_{\underline{j}} \| \leq \frac{C^T M^T}{(CM^2)^\ell} M^\ell \varepsilon,$$

puis on peut prendre $\ell = T$ et alors

$$\| u_{\underline{j}} \| \leq \varepsilon.$$

On obtient bien que, pour tout $\underline{j} \in \mathbb{Z}^m$, $\| u_{\underline{j}} \| = 0$, et donc $u = 0$. Cela prouve que, sur D_N^+, on a $\mathrm{Res}(\Delta + \chi S_M) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$. Ensuite on peut obtenir cette inclusion pour V en utilisant les déterminants régularisés de la même façon que dans le cas de l'action de $\mathbb{S}^1$. Enfin, on conclut en utilisant la théorie d'Agmon pour prouver l'autre inclusion : $\mathrm{Res}(\Delta) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$ et donc l'égalité de l'ensemble des résonances avec multiplicité. Ceci achève la preuve du théorème 5.

3.3 Actions de $SO(n)$

3.3.1 Énoncé du résultat

On considère une action isométrique de $SO(n)$ sur une variété riemannienne X de dimension $n \geq 3$. On suppose que l'hypothèse C du chapitre 1 ($X \setminus \{O\} \approx \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$) est vérifiée et on a donc

$$L^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k,$$

où les $H^k := \mathrm{Ker}\,(\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} - k(k+n-2))$, $k \in \mathbb{N}$, sont les espaces propres du laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. On rappelle que l'action de $\mathfrak{so}_n^{\mathbb{C}}$ sur H^k permet de définir un vecteur de poids maximal noté v^k_{max} qui engendre le sous-espace de poids maximal $H^k_{\omega^k_{max}}$ et on a calculé $v^k_{max} = (x_1 + iy_1)^k$. On rappelle aussi la notation

$$L^2(X)^+ := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}},$$

et on notera P_k la projection de $L^2(X)^+$ sur $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}}$.

Théorème 6 *Soit (X, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ qui possède une action isométrique de $SO(n)$ vérifiant l'hypothèse C. On suppose que l'hypothèse $A_{N,\rho}$ est vérifiée pour un $N > 0$ et une fonction ρ invariante sous l'action de $SO(n)$ et qu'on a donc un prolongement méromorphe-fini de la résolvante du laplacien libre sur un domaine D^+_N.*

Soit V le potentiel

$$V = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k,$$

où, pour tout k, $V_k \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}}$ et $\sup_k \parallel V_k \parallel_\infty < +\infty$. Si V vérifie aussi l'hypothèse $B_{N,\rho}$, et si pour tout $\lambda \in D^+_N \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$, $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ est dans une classe de Schatten $\mathcal{S}_q$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

alors, sur D^+_N, on a $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ et les multiplicités coïncident.

Parmi les exemples de variétés sur lesquelles on peut appliquer le théorème 6 et obtenir des potentiels isorésonants, on a l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et aussi des variétés asymptotiquement hyperboliques ou à bouts cylindriques qui possèdent une action isométrique de $SO(n)$.

Si X possède une action isométrique de $SO(n)$ elle possède aussi une action isométrique de $\mathbb{S}^1$. Comparons les potentiels trouvés. Par l'hypothèse C, X est difféomorphe à $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ et $SO(n)$ agit sur le facteur $\mathbb{S}^{n-1}$. Prenons sur $\mathbb{S}^{n-1}$ les coordonnées hypersphériques $(\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{n-2} \times [0, 2\pi)$, alors on peut considérer l'action de $\mathbb{S}^1$ sur X définie par

$$e^{i\theta}.(r, \phi_1 \dots, \phi_{n-1}) = (r, \phi_1 \dots, \phi_{n-1} - \theta).$$

Si on considère les composantes $V_k \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}}$ de V elles s'écrivent

$$V_k(r, \phi_1 \dots, \phi_{n-1}) = s_k(r) v^k_{max}(\phi_1 \dots, \phi_{n-1}) = s_k(r) (\prod_{i=1}^{n-2} \cos\phi_i)^k e^{ik\phi_{n-1}}.$$

En effet on a $v^k_{max} = (x_1 + iy_1)^k$ avec $x_1 = (\prod_{i=1}^{n-2} \cos\phi_i) \cos\phi_{n-1}$ et $y_1 = (\prod_{i=1}^{n-2} \cos\phi_i) \sin\phi_{n-1}$. Finalement V_k est $\mathbb{S}^1$ homogène de poids k pour l'action de $\mathbb{S}^1$ décrite précédemment.

En conclusion la famille des potentiels construits grâce à l'action de $SO(n)$ est incluse dans celle des potentiels construits grâce à l'action de $\mathbb{S}^1$, sur les variétés remplissant les conditions du théorème 6.

Pourquoi alors s'intéresser à l'action de $SO(n)$? En fait, comme on va le voir, la preuve du théorème 6 ne fait pas intervenir la minoration du bas du spectre du laplacien sur les espaces de symétrie contrairement aux cas des actions du cercle ou du tore. Cela simplifie un peu la preuve et par exemple nous autorise à perturber $\Delta + V_0$ au lieu de Δ avec moins de restrictions sur le V_0. Il faut toujours que V_0 soit invariant sous l'action, ici de $SO(n)$, mais on peut le prendre à support non compact sans avoir à restreindre le support des perturbations V. Dans les cas du cercle et du tore on avait besoin de la compacité du support de V_0 pour pouvoir appliquer le théorème 3 de Colin de Verdière à $\Delta + V_0$. On pouvait se passer du théorème de Colin de Verdière mais alors on ne pouvait minorer le spectre de $\Delta + V_0$ sur les espaces de symétrie que là où le fibré des orbites principales est trivial et il fallait donc y restreindre le support de V.

Prouvons le théorème 6 ; on ne détaillera vraiment que ce qui diffère du cas $\mathbb{S}^1$.

3.3.2 Passage de $L^2(X)$ à $L^2(X)^+$

On commence par étudier $\mathrm{Res}(\Delta + \chi V)$, sur D_N^+, avec $\chi \in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $SO(n)$. On peut écrire l'équation de Lipmann-Schwinger et obtenir que, si $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta + \chi V) \cap (D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta))$, alors il existe $u \in L^2(X)$ non triviale telle que

$$\big(I + \rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N\big)u = 0.$$

Le but est de prouver qu'on peut choisir u dans $L^2(X,g)^+$:

Lemme 13 *Pour $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta + \chi V) \cap (D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta))$, il existe $w \in L^2(X,g)^+$ non triviale telle que*

$$\big(I + \rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N\big)w = 0.$$

Preuve : comme $\rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N : L^2(X) \to L^2(X)$ est un opérateur compact, le sous-espace $\mathcal{H}_{-1} := Ker\big(I + \rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N\big)$ est de dimension finie.

Avec les notations du chapitre précédent ($\mathfrak{g} := \mathfrak{so}_n^{\mathbb{C}}$) on peut remarquer que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}_+$, $\mathcal{H}_{-1}$ est stable par D_ξ. En effet, par définition des vecteurs de poids maximal on a $D_\xi V = \sum_{k=1}^{\infty} D_\xi V_k = 0$. De plus, comme l'action de $SO(n)$ est isométrique, D_ξ commute avec le laplacien et donc avec $\widetilde{R}_0(\lambda_0)$. Enfin D_ξ commute avec ρ et χ car elles sont invariantes sous l'action de $SO(n)$ par hypothèse. Donc si $u \in \mathcal{H}_{-1}$ alors $u = -\rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N u$ et

$$\begin{aligned}
D_\xi u &= -\rho^{-N}\chi D_\xi(V\widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N u)\\
&= -\rho^{-N}\chi(D_\xi(V)\widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N u + V D_\xi(\widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N u))\\
&= -\rho^{-N}\chi V\widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N D_\xi u,
\end{aligned}$$

et donc $D_\xi u \in \mathcal{H}_{-1}$.

Ainsi, on a une représentation finie de $\mathfrak{g}_+$ sur $\mathcal{H}_{-1}$. Or $\mathfrak{g}_+$ est une algèbre nilpotente. Cela vient du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de racines positives de $\mathfrak{g}$ et du calcul suivant : si $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $\zeta \in \mathfrak{g}_\beta$ alors $\mathrm{ad}(\xi)(\zeta) \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. En effet, pour tout $\sigma \in \mathfrak{h}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\sigma)([\xi,\zeta]) = [\sigma,[\xi,\zeta]] &= [\xi,[\sigma,\zeta]] + [[\sigma,\xi],\zeta] \\ &= [\xi,\beta(\sigma)\zeta] + [\alpha(\sigma)\xi,\zeta] \\ &= (\alpha+\beta)(\sigma)[\xi,\zeta].\end{aligned}$$

Alors le théorème de Engel (voir par exemple [FH91] p.125) dit qu'il existe un vecteur non nul $w \in \mathcal{H}_{-1}$ tel que $D_\xi w = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}_+$.

On peut décomposer w :

$$w = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k, \quad w_k \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k,$$

et pour $\xi \in \mathfrak{g}_+$ on a

$$D_\xi w = \sum_{k\in\mathbb{N}} D_\xi w_k = 0,$$

avec $D_\xi w_k \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k$. Comme la somme précédente est directe, on a, pour tout k, $w_k \in (L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k) \bigcap (\underset{\xi\in\mathfrak{g}_+}{\cap} \operatorname{Ker} D_\xi)$. Mais, avec le lemme 6 du chapitre 1, on a $(L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k) \bigcap (\underset{\xi\in\mathfrak{g}_+}{\cap} \operatorname{Ker} D_\xi) = L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^k_{\omega^k_{max}}$. Finalement, pour tout k, $w_k \in H^k_{\omega^k_{max}}$ et $w \in L^2(X)^+$. $\square$

3.3.3 Décalage et fin de la preuve du théorème 6

Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(\Delta + \chi V) \cap (D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta))$, et prenons un $w \in L^2(X)^+$ non trivial donné par le lemme 13 et qui vérifie

$$\big(I + \rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N\big)w = 0.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $w_j := P_j w \in L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^j_{\omega^j_{max}}$. Les P_j commutent avec ρ, χ car ces dernières sont invariantes sous l'action de $SO(n)$ et avec $\widetilde{R}_0(\lambda_0)$ car l'action est isométrique. On a

$$w_j = P_j\big(-\rho^{-N}\chi V \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N w\big) = -\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-2N}\chi P_j\big(V_k \rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N w\big).$$

De plus on a déjà vu que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}_+$, D_ξ commute avec $\widetilde{R}_0(\lambda_0)$ et ρ. Donc, si $w \in L^2(X)^+$ alors $\rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N w \in L^2(X)^+$ et on peut écrire $\rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N w = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0)\rho^N w)$.

Utilisons le décalage créé par les vecteurs de poids maximal qui est décrit par le lemme 7 du chapitre 1, c'est-à-dire :

$$V_k : L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^{\ell}_{\omega^{\ell}_{max}} \to L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H^{\ell+k}_{\omega^{\ell+k}_{max}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} w_j &= -\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-2N} \chi V_k P_{j-k} \big(\rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0) \rho^N w\big) \\ w_j &= -\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-2N} \chi V_k \rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0) \rho^N P_{j-k}(w). \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse $\sup\limits_k \| V_k \|_\infty < +\infty$, les opérateurs $\rho^{-2N} \chi V_k \rho^N \widetilde{R}_0(\lambda_0) \rho^N$ sont uniformément bornés en k et donc il existe une constante C telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\| w_j \| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \| w_{j-k} \| .$$

Avec cette inégalité et le fait que $w_j = 0$ pour tout $j \leq 0$, on obtient $w_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et donc $w = 0$ ce qui contredit notre hypothèse.

Finalement on a montré que pour tout $\chi \in C_c^{\infty}(X)$ invariante sous l'action de $SO(n)$, on a $D_N^+ \cap \mathrm{Res}(\Delta + \chi V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$.

Ensuite on passe de χV à V comme dans le cas de l'action de $\mathbb{S}^1$. On introduit une famille (χ_r) de fonctions lisses à support compact et invariantes sous l'action de $SO(n)$ telle que $\| (\chi_r - 1)\rho \|_\infty$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$. On utilise l'hypothèse $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N \in \mathcal{S}_q$ pour caractériser les résonances de $\Delta + V$ comme les zéros de la fonction holomorphe en λ, $F(V, \lambda) := \det_q \big(I + \rho^{-N} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N\big)$. Enfin par le théorème de Rouché on montre que si $\widetilde{R}_V$ a un pôle dans $D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ alors, il existe r tel que $\widetilde{R}_{\chi_r V}$ en a aussi un ce qui contredit ce qu'on vient de faire dans le paragraphe précédent. D'où $D_N^+ \cap \mathrm{Res}(\Delta + V) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$.

Enfin on montre $D_N^+ \cap \mathrm{Res}(\Delta) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$ et en fait l'égalité avec multiplicité en utilisant la théorie des perturbations des résonances d'Agmon et ce exactement de la même façon que dans le cas $\mathbb{S}^1$. Ceci achève la preuve du théorème 6.

Chapitre 4

Potentiels isorésonants sur la caténoïde

Dans l'article [WZ00], Wunsch et Zworski considèrent des variétés à bord qui sont réelles analytiques près du bord et munies d'une métrique de scattering holomorphe dans un voisinage du bord. Ils prolongent alors, en utilisant une méthode de distorsion analytique, la résolvante du laplacien libre $(\Delta - z)^{-1}$ de $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z < 0\}$ à $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \arg z < 2\theta_0\}$ pour un $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Ce prolongement est méromorphe avec des pôles de rang fini ce qui permet de définir les résonances. Ils donnent l'exemple de la caténoïde. Comme $\mathbb{S}^1$ agit isométriquement sur cette variété, on pourrait essayer d'y construire des potentiels isorésonants. Mais la théorie des perturbations des résonances d'Agmon, dont on s'est servi de manière cruciale dans le chapitre précédent, ne s'applique plus dans ce cadre. Néanmoins, grâce à la distorsion analytique, on récupère des résultats sur les perturbations des résonances ce qui va nous permettre de construire des potentiels isorésonants sur la caténoïde.

4.1 Énoncé du résultat

La caténoïde est la surface X difféomorphe au cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et munie de la métrique $g = \mathrm{d}r^2 + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\alpha^2$ avec $(r, e^{i\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ et a une constante strictement positive. On prend $x = \frac{1}{|r|}$ en dehors de $\{r = 0\}$ comme fonction définissant le bord à l'infini de X, $\partial_\infty X$, qui est constitué de deux copies de $\mathbb{S}^1$. On a, au voisinage du bord, $g = \frac{\mathrm{d}x^2}{x^4} + \frac{(1+a^2x^2)\mathrm{d}\alpha^2}{x^2}$ qui est donc une métrique dite de scattering, au sens de Melrose ([Mel95]).

La caténoïde est un exemple cité par Wunsch et Zworski dans [WZ00] et on peut donc y appliquer leur théorème 1. Ce théorème affirme qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que la résolvante du laplacien libre $(\Delta - z)^{-1}$ se prolonge méromorphiquement de $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z < 0\}$ à $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \arg z < 2\theta_0\}$ à valeurs dans les opérateurs de $L^2_c(X)$ dans $H^2_{loc}(X)$. On notera $\widetilde{R}_0$ ce prolongement. On appelle, comme auparavant, résonances ses pôles qui sont de rang fini et on note $\mathrm{Res}(\Delta)$ leur ensemble.

$\mathbb{S}^1$ agit sur la caténoïde de manière isométrique en agissant trivialement sur le facteur $\mathbb{S}^1$ de X : $e^{i\beta}.(r, e^{i\alpha}) = (r, e^{i(\alpha+\beta)})$. En se servant de cette action on va pouvoir construire des potentiels isorésonants de la façon suivante,

Théorème 7 *Soit la caténoïde* $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathrm{d}r^2 + (r^2 + a^2)\mathrm{d}\alpha^2)$ *avec* $(r, e^{i\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ *et* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *On prend* $x = \frac{1}{|r|}$ *en dehors de* $\{r = 0\}$ *comme fonction définissant le bord de* X. *Soit* $V \in xL^\infty(X)$ *défini par*

$$V(r, e^{i\alpha}) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(r) e^{im\alpha}, \quad (r, e^{i\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1,$$

où, pour tout m, $V_m \in L^\infty(\mathbb{R})$. *On suppose que sur un voisinage du bord de* X, $V(x, e^{i\alpha})$ *ainsi que toutes ses sommes partielles se prolongent analytiquement sur* $U \times W$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *contenant* $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq 1, 0 \leq \arg \zeta \leq \theta_0\}$ *avec* $\theta_0 > 0$ *et* W *est un voisinage de* $\mathbb{S}^1$ *dans* $\mathbb{C}$. *On suppose aussi que, sur* X *et sur tout compact de* $U \times W$, *les sommes partielles de* V *tendent vers* V *en norme infinie.*

Alors la résolvante $(\Delta + V - z)^{-1}$ *admet un prolongement méromorphe-fini de* $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im} z < 0\}$ *à* $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta_0\}$ *à valeurs dans les opérateurs de* $L^2_c(X)$ *dans* $H^2_{loc}(X)$, *et de plus, dans cet ouvert,* $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ *avec les mêmes multiplicités.*

Illustrons ce théorème avec un exemple de potentiel isorésonant sur la caténoïde. On peut considérer

$$V(x, e^{i\alpha}) = \frac{xe^{i\alpha}}{1 - \rho e^{i\alpha}} = x \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{m-1} e^{im\alpha},$$

avec $0 \leq \rho < 1$ et $U = \mathbb{C}$, $W = \{\omega \in \mathbb{C}; |\omega| < \rho^{-1}\}$.

On va utiliser la distorsion analytique pour prolonger la résolvante de $\Delta + V$. Cette construction nous servira aussi pour étudier les perturbations des résonances et démontrer l'isorésonance du théorème.

4.2 Distorsion analytique et prolongement de la résolvante

4.2.1 Distorsion analytique

On va reprendre la construction faite par Wunsch et Zworski dans [WZ00] pour le laplacien libre. On va en rappeler les étapes clés pour montrer qu'elle s'adapte à l'ajout d'un potentiel vérifiant les hypothèses du théorème 7 et aussi car cette construction nous servira pour montrer l'isorésonance.

On commence par construire une famille $(X_\theta)_{0 \leq \theta \leq \theta_0}$ de sous-variétés de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec θ_0 donné dans l'énoncé du théorème 7. On les construit de façon qu'elles soient totalement réelles, c'est-à-dire que, pour tout $p \in X_\theta$, on a $T_pX_\theta \cap iT_pX_\theta = \{0\}$ et de dimension maximale. On procède de la manière suivante.

Soient $\epsilon > 0$ et $(t_0, t_1) \in]0,1[^2$ avec $t_0 < t_1$, il existe alors une déformation lisse de $[0,1)$ dans U qu'on notera $\gamma_\theta(t), t \in [0,1)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} \gamma_\theta(t) = te^{i\theta} \quad \text{pour } 0 \le t < t_0 \\ \gamma_\theta(t) \equiv t \quad \text{pour } t > t_1 \\ \arg \gamma_\theta(t) \ge 0 \\ 0 \le \arg \gamma_\theta(t) - \arg \gamma'_\theta(t) \le \epsilon \\ 0 \le 2\arg \gamma_\theta(t) - \arg \gamma'_\theta(t) \le \theta + \epsilon. \end{gathered} \tag{4.1}$$

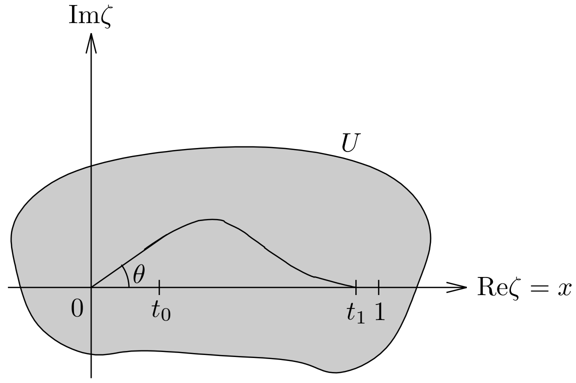

FIG. 4.1 – Le contour γ_θ.

On pose alors $X_\theta = (\gamma_\theta \times \partial_\infty X) \cup (X \cap \{x \ge 1\})$.

Sur un voisinage du bord de X, la métrique g est de la forme $\frac{\mathrm{d}x^2}{x^4} + \frac{h}{x^2}$ avec $h = (1 + a^2x^2)\mathrm{d}\alpha^2$ qui se prolonge holomorphiquement sur $U \times W$. Donc grâce aux hypothèses faites sur V, les coefficients de $P^V := \Delta + V$ qui est a priori un opérateur sur X, se prolongent holomorphiquement sur $U \times W$. On note $\widetilde{P}^V$ l'opérateur différentiel obtenu par ce prolongement. Comme X_θ est totalement réelle et de dimension maximale, on peut définir sans ambiguïté (cf [SBZ95]) l'opérateur différentiel P^V_θ par

$$\forall u \in C^\infty(X_\theta), \;\; P^V_\theta u = (\widetilde{P}^V \widetilde{u})_{|X_\theta}$$

où $\widetilde{u}$ est un prolongement presque analytique de u c'est-à-dire

$$\widetilde{u} \in C^\infty(U \times W), \;\; \widetilde{u}_{|X_\theta} = u, \;\; \overline{\partial}\widetilde{u}_{|X_\theta} = \mathcal{O}(\mathrm{d}(., X_\theta)^N), \;\; \text{pour tout } N.$$

Lemme 14 *Si $V \in xL^\infty(X)$ vérifie les hypothèses du théorème 7, alors, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, $P^V_\theta - z : H^2(X_\theta) \to L^2(X_\theta)$ est un opérateur de Fredholm d'indice* 0.

Preuve : Pour montrer que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, $P^V_\theta - z$ est un opérateur de Fredholm, on peut reprendre exactement les arguments que Wunsch et Zworski

([WZ00]) utilisent pour le laplacien libre. Si on note Δ_θ la restriction à X_θ du prolongement du laplacien, ils remarquent que son symbole principal ne s'annule pas. En fait, grâce aux conditions (4.1), pour $t < t_0$ ce symbole principal est le symbole principal du laplacien sur X multiplié par $e^{2i\theta}$. De plus, pour $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, le symbole normal de $\Delta_\theta - z$, qui est la restriction du symbole de $\Delta_\theta - z$ au bord $\partial X_\theta = \partial X$(voir [Mel94] pour une définition générale), ne s'annule pas non plus. Le calcul pseudodifférentiel développé par Melrose dans [Mel94] et rappelé dans l'appendice A de [WZ00], permet alors d'inverser $\Delta_\theta - z$ modulo des opérateurs compacts. Cela prouve que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, $\Delta_\theta - z$ est un opérateur de Fredholm.

Ici la seule différence est l'ajout du potentiel V. Il ne change pas le symbole principal et comme il s'annule sur le bord de X_θ il ne change pas non plus le symbole normal. On obtient donc de la même façon que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, $P_\theta^V - z$ est un opérateur de Fredholm.

Pour le calcul de l'indice, on peut remarquer que l'indice de $P_\theta^V - z$ est localement constant sur $\{(\theta, z); 0 \leq \theta \leq \theta_0, z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+\}$. Or il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0 \leq \arg z \leq 2\theta\}$ tel que $P^V - z_0$ soit inversible. On commence par fixer θ et on passe de z à z_0 en suivant un chemin continu qui évite $\{\arg z = 2\theta\}$ puis on passe de θ à 0 pour obtenir le résultat. C'est-à-dire

$$\mathrm{ind}(P_\theta^V - z) = \mathrm{ind}(P_\theta^V - z_0) = \mathrm{ind}(P^V - z_0) = 0. \quad \square$$

On en déduit par application de la théorie des opérateurs de Fredholm,

Corollaire 1 *Pour tout* $0 \leq \theta \leq \theta_0$, P_θ^V *a un spectre discret dans* $\mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$ *et de plus,* $z \in \mathbb{C} \setminus e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$ *est dans le spectre de* P_θ^V *si et seulement si* $\ker(P_\theta^V - z) \neq 0$.

Puis, on obtient le lemme suivant dont la démonstration est exactement la même que celle, sans potentiel, de Wunsch et Zworski ([WZ00]).

Lemme 15 *Si* $0 \leq \theta_2 < \theta_1 < \theta_0$ *et si* $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1} e^{2i\theta}\mathbb{R}^+$, *alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$\dim \ker(P_{\theta_1}^V - z)^k = \dim \ker(P_{\theta_2}^V - z)^k.$$

On en déduit que pour θ tel que $0 \leq \theta_2 \leq \theta \leq \theta_0$, le spectre de P_θ^V dans $\{0 \leq \arg z < 2\theta_2\}$ ainsi que sa multiplicité, ne dépendent pas de θ. On a aussi que ce spectre ne dépend pas du γ_θ choisi vérifiant (4.1).

4.2.2 Prolongement de la résolvante

Montrons que la résolvante $R_V(z) := (\Delta + V - z)^{-1}$ se prolonge méromorphiquement de $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im} z < 0\}$ à $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta_0\}$ à valeurs dans les opérateurs de $L_c^2(X)$ dans $H_{loc}^2(X)$.

Soit z tel que $\arg z < 2\theta_0$ et tel que z ne soit pas une valeur propre de $P_{\theta_0}^V$. Prenons $f \in L_c^2(X)$. D'après la dernière remarque du paragraphe précédent, on peut choisir γ_{θ_0} et plus particulièrement le t_1 qui le définit de telle façon que, sur le support de f, X_{θ_0} coïncide avec X. Alors $f \in L^2(X_{\theta_0})$ et il existe donc un unique $u_{\theta_0} \in H^2(X_{\theta_0})$ solution de

$$(P_{\theta_0}^V - z)u_{\theta_0} = f.$$

On va utiliser le lemme suivant dont la preuve est donnée dans [SBZ95],

Lemme 16 *Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, un compact $K \subset \Omega$ et une famille continue $X_t, t \in [0,1]$ de sous-variétés totalement réelles de Ω de dimension maximale telles que $X_t \cap (\Omega \setminus K) = X_{t'} \cap (\Omega \setminus K)$ pour tous $t, t' \in [0,1]$. Soit $\widetilde{P}$ un opérateur différentiel avec des coefficients holomorphes dans Ω tel que P_{X_t} (la restriction de $\widetilde{P}$ sur X_t) soit elliptique pour tout $t \in [0,1]$. Si u est une distribution sur X_0 et si $P_{X_0}u$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bigcup\limits_{t\in[0,1]} X_t$ alors il en est de même pour u.*

Appliquons ce lemme à notre situation. f se prolonge holomorphiquement sur $\bigcup\limits_{\theta\in[0,\theta_0]} X_\theta$, car les déformations interviennent en dehors de son support. Comme $P_\theta^V - z$ reste elliptique pour tout $\theta \in [0,\theta_0]$, en appliquant le lemme 16, on obtient un prolongement holomorphe de u_{θ_0} sur $\bigcup\limits_{\theta\in[0,\theta_0]} X_\theta$. On note G ce prolongement.

On définit alors le prolongement de la résolvante par

$$\widetilde{R}_V(z)f = G_{|X_0} \in H^2(X).$$

Étudions maintenant ce qui se passe près d'une valeur propre z_0 de $P_{\theta_0}^V$; z_0 qui est aussi valeur propre de P_θ^V pour $\arg z_0 < 2\theta \leq 2\theta_0$. Pour z près de z_0 et θ tels que $\arg z < 2\theta$ on a le développement de Laurent suivant

$$(P_\theta^V - z)^{-1} = \sum_{j=1}^{M(z_0)} \frac{A_j^\theta(z_0)}{(z-z_0)^j} + H_\theta(z,z_0),$$

où les $A_j^\theta(z_0)$ sont des opérateurs de rang fini et $H_\theta(z,z_0)$ est holomorphe en z près de z_0. $A_1^\theta(z_0)$ est la projection sur le noyau de $(P_\theta^V - z_0)^{M(z_0)}$. Avec le lemme 16, son noyau de Schwartz ainsi que ceux des $A_j^\theta(z_0) = (P_\theta^V - z_0)^{j-1}A_1^\theta(z_0)$ se prolongent holomorphiquement sur $\bigcup\limits_{\theta'\in[0,\theta]} X_{\theta'}$. Ce qui montre que la résolvante prolongée admet au voisinage de ses pôles un développement de Laurent de la même forme.

En conclusion, les résonances, qui sont définies comme les pôles du prolongement de la résolvante, sont aussi caractérisées par : $z_0 \in \{\arg z < 2\theta_0\}$ est une résonance de $\Delta_X + V$ si et seulement si z_0 est dans le spectre d'un P_θ^V avec $\arg z_0 < 2\theta \leq 2\theta_0$. Sa multiplicité est donnée, en reprenant les notations précédentes pour le développement de Laurent de $(P_\theta^V - z)^{-1}$, par le rang de $A_1^\theta(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,\epsilon)}(P_\theta^V - z)^{-1}\mathrm{d}z$ et son ordre par $M(z_0)$.

Il découle du lemme 15 que les résonances, leur multiplicité et leur ordre ne dépendent pas du θ choisi.

4.3 Démonstration de l'isorésonance

On commence, comme on l'a fait pour les autres constructions de potentiels isorésonants, par localiser les résonances de $\Delta+V$ parmi les résonances du laplacien libre.

4.3.1 Localisation des résonances

Localisation des résonances pour les sommes partielles tronquées de V

Soit $S_M(r,e^{i\alpha}) = \sum_{m=1}^{M} V_m(r)e^{im\alpha}$ et $\chi \in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$. Dans cette partie montrons que $\mathrm{Res}(\Delta+\chi S_M) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$ sur $D^+ := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \arg z < 2\theta_0\}$.

Soit une autre fonction de troncature $\chi_1 \in C_c^\infty(X)$ invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$ telle que $\chi_1 = 1$ sur le support de χ. On a alors pour $z \in D^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$,

$$(\Delta+\chi S_M - z)\widetilde{R}_0(z)\chi_1 = \chi_1(I+\chi S_M\widetilde{R}_0(z)\chi_1).$$

$\chi S_M\widetilde{R}_0(z)\chi_1$ forme une famille holomorphe sur $D^+\setminus\mathrm{Res}(\Delta)$ d'opérateurs compacts telle que

$$\|\chi S_M\widetilde{R}_0(z)\chi_1\| < 1$$

pour $|z|$ assez grand dans $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z < 0\}$. On peut donc appliquer la théorie de Fredholm analytique et obtenir que $(I+\chi S_M\widetilde{R}_0(z)\chi_1)^{-1}$ et donc $\widetilde{R}_{\chi S_M}(z) := (\Delta+\chi S_M - z)^{-1}$ sont méromorphes sur $D^+\setminus\mathrm{Res}(\Delta)$. De plus, dans $D^+\setminus\mathrm{Res}(\Delta)$, on peut caractériser les pôles de $\widetilde{R}_{\chi S_M}$ c'est-à-dire les résonances par l'existence d'un $u \in L^2(X)$ non trivial, solution de

$$(I+\chi S_M\widetilde{R}_0(z)\chi_1)u = 0.$$

Ensuite on montre que cette solution u non triviale ne peut pas exister et ce de la même façon que dans la preuve du théorème 4. On utilise donc le décalage créé par les composantes $V_m(r)e^{im\alpha}$ sur les espaces de symétrie $L_j^2(X)$. Il y a deux choses à vérifier. Premièrement la caténoïde vérifie bien l'hypothèse D. En effet, tout compact K de X est inclus dans une variété compacte à bord $\widetilde{K} = [-R,R]\times\mathbb{S}^1$ qu'on peut munir de la métrique $\widetilde{g} = \mathrm{d}r^2 + f(r)\mathrm{d}\alpha^2$ avec $f(r) = r^2+a^2$ sur K et constante près du bord de $\widetilde{K}$. Il faut aussi vérifier que $\widetilde{R}_0$ commute avec l'action de $\mathbb{S}^1$ pour qu'elle commute avec les projecteurs P_j. Pour cela, il faut revenir à la construction de $\widetilde{R}_0$ par la méthode de distorsion analytique. Or cette distorsion ne touche pas le facteur $\partial_\infty X$ de la caténoïde sur lequel opère $\mathbb{S}^1$. Donc l'action de $\mathbb{S}^1$ est isométrique sur chaque X_θ et elle commute avec $\widetilde{R}_0$.

On obtient finalement que $\Delta+\chi S_M$ n'a pas de résonances dans D^+ en dehors de $\mathrm{Res}(\Delta)$.

Localisation des résonances pour V

Il s'agit de contrôler les perturbations des résonances quand on passe des sommes partielles tronquées au potentiel V en entier. Pour cela, au lieu d'utiliser les déterminants régularisés (qui étaient adaptés aux espaces à poids $\rho^N L^2$ mais pas aux fonctions de troncature) comme précédemment, on va se servir de la distorsion analytique qui transforme les résonances en valeurs propres.

Supposons par l'absurde que $\Delta + V$ a une résonance z_0 dans $D^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. En utilisant la distorsion analytique on traduit cela par : z_0 est une valeur propre de P_θ^V pour $\arg z_0 < 2\theta \leq 2\theta_0$. Soit $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta\} \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$ un ouvert, de bord Γ régulier, contenant z_0 (l'indice de z_0 par rapport à Γ est égal à 1) et tel que $\overline{\Omega} \cap \mathrm{Res}(\Delta + V) = \{z_0\}$. Le but va être de montrer qu'il existe χ une fonction de troncature, invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$, et M tels que $P_\theta^{\chi S_M}$ ait une valeur propre dans Ω. En effet $\Delta + \chi S_M$ aurait alors une résonance dans Ω ce qui contredirait le résultat de la partie précédente.

On a supposé dans les hypothèses du théorème 7 que, pour tout M, S_M se prolonge analytiquement sur $U \times W$, ainsi que V. On peut donc restreindre ces deux prolongements à X_θ et désormais travailler sur X_θ. Or $V \in xL^\infty(X)$, donc V tend vers 0 quand on s'approche de ∂X_θ. Donc il existe $\chi \in C_c^\infty(X_\theta)$, invariante sous l'action de $\mathbb{S}^1$, qui se prolonge analytiquement sur $U \times W$, telle que $\| \chi V - V \|_{L^\infty(X_\theta)}$ soit aussi petit que l'on veut. Les hypothèses du théorème 7 permettent aussi de dire que les sommes partielles S_M tendent vers V en norme infinie sur X_θ. Finalement il existe χ comme précédemment et M tels que

$$\| V - \chi S_M \|_{L^\infty(X_\theta)} < \frac{\delta^2}{\delta + \frac{\ell}{2\pi}}$$

où $\delta^{-1} = \max_{z \in \Gamma} \| (P_\theta^V - z)^{-1} \|$ et ℓ est la longueur de Γ. Pour la constante de cette majoration on s'est inspiré de la technique développée par Gohberg et Krejn dans [GK71] (théorème 3.1).

Introduisons les projecteurs de $L^2(X_\theta)$ associés aux espaces propres généralisés des deux opérateurs que l'on compare :

$$\begin{aligned} \Pi_V &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (P_\theta^V - z)^{-1} \mathrm{d}z \\ \Pi_{\chi S_M} &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (P_\theta^{\chi S_M} - z)^{-1} \mathrm{d}z \end{aligned}$$

On a $(P_\theta^{\chi S_M} - z)^{-1} = (P_\theta^V - z)^{-1} \big(I + (\chi S_M - V)(P_\theta^V - z)^{-1} \big)^{-1}$. Or comme $\frac{\delta^2}{\delta + \frac{\ell}{2\pi}} < \delta$, pour tout $z \in \Gamma$, on est assuré de la convergence de

$$(P_\theta^{\chi S_M} - z)^{-1} = (P_\theta^V - z)^{-1} \big(I + \sum_{j=1}^{\infty} [(V - \chi S_M)(P_\theta^V - z)^{-1}]^j \big).$$

Regardons la différence des deux projecteurs :

$$\Pi_{\chi S_M} - \Pi_V = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (P_\theta^V - z)^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}[(V-\chi S_M)(P_\theta^V - z)^{-1}]^j \mathrm{d}z.$$

En majorant on obtient

$$\| \Pi_{\chi S_M} - \Pi_V \| \leq \frac{\ell}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}\frac{\|(P_\theta^V - z)^{-1}\|^2 \| V - \chi S_M \|_{L^\infty(X_\theta)}}{1 - \|(P_\theta^V - z)^{-1}\| \| V - \chi S_M \|_{L^\infty(X_\theta)}},$$

or $\| (P_\theta^V - z)^{-1} \| \leq \delta^{-1}$ par définition de δ et $\| V - \chi S_M \|_{L^\infty(X_\theta)} < \frac{\delta^2}{\delta + \frac{\ell}{2\pi}}$ par hypothèse, donc $1 - \|(P_\theta^V - z)^{-1}\| \| V - \chi S_M \|_{L^\infty(X_\theta)} > 1 - \frac{\delta}{\delta + \frac{\ell}{2\pi}}$ et donc

$$\| \Pi_{\chi S_M} - \Pi_V \| < 1.$$

Donc les images de Π_V et de $\Pi_{\chi S_M}$ ont la même dimension, qui n'est pas nulle car z_0 est une valeur propre de P_θ^V, donc $P_\theta^{\chi S_M}$ a une valeur propre dans Ω et on a notre contradiction.

4.3.2 Persistance des résonances du laplacien libre

Montrons pour finir que, dans $D^+ = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta_0\}$, on a $\mathrm{Res}(\Delta) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$. Cette fois au lieu d'utiliser la théorie des perturbations d'Agmon pour se ramener à un problème spectral, on va utiliser la distorsion analytique.

Soit $z_0 \in D^+$ une résonance de Δ de multiplicité m. Prenons $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta_0\}$ un domaine tel que $\overline{\Omega} \cap \mathrm{Res}(\Delta) = \{z_0\}$. Considérons la famille d'opérateurs $\Delta + tV$ pour $t \geq 0$. On note que tV vérifie encore les hypothèses du théorème 7 et qu'on peut donc localiser ses résonances comme dans la partie précédente $\mathrm{Res}(\Delta + tV) \subset \mathrm{Res}(\Delta)$ et donc :

$$\mathrm{Res}(\Delta + tV) \cap \Omega \subset \{z_0\}.$$

Introduisons l'ensemble suivant

$$E := \{t_0 \geq 0 \ ; \ \forall t \in [0, t_0], \ \mathrm{Res}(\Delta + tV) \cap \Omega = \{z_0\} \ \text{ avec la multiplicité } m\},$$

dont on va montrer par connexité qu'il est égal à $[0, +\infty[$. Déjà il est non vide car $0 \in E$.

Soit $t_0 \in E$, et θ tel que $\arg z_0 < 2\theta \leq 2\theta_0$ et tel que $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \arg z < 2\theta\}$. On sait par distorsion analytique que le spectre de $P_\theta^{t_0 V}$ dans Ω correspond exactement aux résonances de $\Delta + t_0 V$ avec les mêmes multiplicités. Donc

$$\mathrm{Spec}(P_\theta^{t_0 V}) \cap \Omega = \{z_0\}.$$

Or $t \to P_\theta^{tV}$ est une famille holomorphe au sens de Kato pour t dans un voisinage complexe de t_0 car $P_\theta^{tV} = \Delta_\theta + tV_{|X_\theta}$ et que V est borné sur X_θ. Donc ses valeurs propres sont continues pour t dans un voisinage de t_0. Or la localisation des résonances de $\Delta + tV$ donne que pour tout t

$$\mathrm{Spec}(P_\theta^{tV}) \cap \Omega \subset \{z_0\},$$

donc, il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$,

$$\mathrm{Spec}(P_\theta^{tV}) \cap \Omega = \{z_0\},$$

avec la multiplicité m. Enfin grâce à la distorsion analytique, on obtient, que pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$

$$\mathrm{Res}(\Delta + tV) \cap \Omega = \{z_0\},$$

avec la multiplicité m et donc $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ est inclus dans E qui donc un ouvert.

On montre que E est aussi fermé en faisant le même raisonnement sur le complémentaire de E dans $[0, +\infty[$.

Finalement $E = [0, +\infty[$ et en prenant $t = 1$ on obtient que, dans Ω, $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec les mêmes multiplicités. En refaisant le raisonnement au voisinage de chacune des résonances du laplacien libre on a $\mathrm{Res}(\Delta + V) = \mathrm{Res}(\Delta)$ avec les mêmes multiplicités dans tout D^+ ce qui achève la démonstration du théorème 7.

Chapitre 5

Diffusion par des potentiels isorésonants sur des variétés asymptotiquement hyperboliques

On peut aussi trouver dans la littérature une définition des résonances comme pôles de l'opérateur de diffusion. Une question naturelle est donc : comment l'ajout de nos potentiels isorésonants modifie l'opérateur de diffusion ? En fait Christiansen signale dans [Chr06], [Chr08], que les potentiels isorésonants qu'elle construit sur $\mathbb{R}^n$ euclidien préservent la phase de l'opérateur de diffusion, la phase étant le logarithme du déterminant de l'opérateur de diffusion. On va montrer un résultat de ce type pour nos potentiels isorésonants construits sur des variétés asymptotiquement hyperboliques possédant une action isométrique de $\mathbb{S}^1$.

On en profitera pour rappeler, dans ce cadre, la construction de l'opérateur de diffusion. En fait je n'ai pas trouvé les détails de cette construction pour un potentiel V **complexe** dans la littérature. On verra que les techniques de Graham et Zworski [GZ03] et Joshi et Sà Barreto [JSB00] s'adaptent sans problème à ce cadre comme le signalent Borthwick et Perry dans [BP02].

Remarque 8 *On peut aussi le faire pour des potentiels construits sur des variétés asymptotiquement euclidiennes comme la caténoïde. En effet la théorie de la diffusion développée par Melrose dans [Mel94] s'adapte à nos potentiels complexes.*

5.1 Quelques rappels

Rappelons la définition de variété asymptotiquement hyperbolique. Soit $\overline{X} = X \cup \partial\overline{X}$ une variété compacte lisse à bord qu'on prendra exceptionnellement de dimension $n+1$ dans ce chapitre et ρ une fonction définissant son bord telle que, sur un voisinage collier du bord, la métrique g est de la forme

$$g = \frac{\mathrm{d}\rho^2 + h(\rho)}{\rho^2},$$

où $\rho \to h(\rho)$ est une famille lisse de métriques sur le bord de $\overline{X}$. Dans ces coordonnées, le laplacien s'écrit

$$\Delta = -(\rho\partial_\rho)^2 + n\rho\partial_\rho + \rho^2\Delta_{h(\rho)} - \frac{1}{2}\rho\mathrm{Tr}(h^{-1}(\rho)\partial_\rho h(\rho))\rho\partial_\rho, \tag{5.1}$$

avec $\Delta_{h(a)}$ le laplacien sur l'hypersurface $\{\rho = a\}$ muni de la métrique $h(a)$. Le terme $\mathrm{Tr}(h^{-1}(\rho)\partial_\rho h(\rho))$ est la trace de l'opérateur linéaire associé au tenseur symétrique $(\partial_\rho h)(\rho)$ via $h(\rho)$.

On rappelle que ce laplacien a pour spectre un spectre essentiel $[\frac{n^2}{4}, +\infty)$ auquel peut s'ajouter un nombre fini de valeurs propres dans $(0, \frac{n^2}{4})$.

On appelle $\dot{C}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions lisses, à valeurs complexes, sur une compactification $\overline{X}$ de X et dont le développement de Taylor s'annule à tout ordre sur le bord de cette compactification.

Les résultats de Mazzeo et Melrose [MM87] s'adaptent avec un potentiel $V \in \dot{C}^\infty(X)$. Donc si $V \in \dot{C}^\infty(X)$, $R_V(\lambda) := (\Delta + V - \lambda(n-\lambda))^{-1}$ qui est initialement méromorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda > \frac{n}{2}\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(X))$, admet un prolongement méromorphe fini sur $D_+^N := \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\lambda > \frac{n}{2} - N\} \setminus (\frac{n}{2} - \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\rho^N L^2(X), \rho^{-N} L^2(X))$ et ce pour tout N. Grâce à [Gui05a] on peut ajouter les points $\frac{n}{2} - \mathbb{N}$ à D_N^+ si la métrique est paire. On notera $\widetilde{R}_V$ ce prolongement et comme auparavant $\mathrm{Res}(\Delta + V)$ l'ensemble des résonances c'est-à-dire l'ensemble de ses pôles. De plus on a (cf [MM87] et [Gui05a]) :

Proposition 12 *Pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta + V)$, $\widetilde{R}_V(\lambda)$ est un opérateur continu de $\dot{C}^\infty(X)$ dans $\rho^\lambda C^\infty(X)$.*

Remarque 9 *Cette proposition, les résultats de prolongement qui la précédent ainsi que toutes les constructions qui suivent sont encore valables pour un potentiel V appartenant à $\rho C^\infty(\overline{X})$. On prend V dans $\dot{C}^\infty(X)$ pour pouvoir appliquer le théorème d'isorésonance 4 sur $\mathbb{C}$ en entier (cf la future remarque 13).*

5.2 Opérateur de Poisson

On construit l'opérateur de Poisson en adaptant à un potentiel complexe ce qui est fait dans [GZ03] et [JSB00].

Proposition 13 *Soit $V \in \dot{C}^\infty(X)$, et $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) \geq \frac{n}{2}\} \setminus \big(\frac{1}{2}(n + \mathbb{N}) \cup \mathrm{Res}(\Delta + V)\big)$. Pour toute $f \in C^\infty(\partial\overline{X})$, il existe une unique solution $u \in C^\infty(X)$ vérifiant*

$$\begin{cases} (\Delta + V - \lambda(n-\lambda))u = 0 \\ u = \rho^\lambda F(\lambda) + \rho^{n-\lambda} G(\lambda) \ \text{ avec } \ (F(\lambda), G(\lambda)) \in C^\infty(\overline{X})^2 \\ G(\lambda) \mid_{\partial\overline{X}} = f. \end{cases}$$

On appelle $\mathcal{P}_V(\lambda)$ l'opérateur (de Poisson) qui à f associe l'unique solution u.

Remarque 10 *Défini comme cela, l'opérateur de Poisson dépend de la fonction ρ définissant le bord. On peut en fait s'affranchir de cette dépendance en utilisant des fibrés de demi-densités sur $\overline{X}$, pour les détails voir [JSB00] ou [Gui04].*

Preuve : Le premier point est, pour $\lambda \notin \frac{1}{2}(n+\mathbb{N})$ et $f_0 \in C^\infty(\partial\overline{X})$ fixés, de construire une solution $F_\infty(\lambda, f_0) \in C^\infty(\overline{X})$ de

$$(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda}F_\infty) = O(\rho^\infty), \;\; F_\infty|_{\rho=0} = f_0.$$

Pour cela on construit par récurrence, pour $j \in \mathbb{N}$, $F_j \in C^\infty(\overline{X})$ et $f_j \in C^\infty(\partial\overline{X})$ par la formule :

$$F_0 = f_0, \;\; \forall j > 0, \; f_j = -\frac{(\rho^{-j-n+\lambda}(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda}F_{j-1}))|_{\rho=0}}{j(2\lambda - n - j)},$$
$$F_j = F_{j-1} + f_j\rho^j.$$

En utilisant la forme du laplacien rappelée précédemment (5.1) et l'hypothèse sur V on a, pour toute $f_j \in C^\infty(\partial\overline{X})$,

$$(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda+j}f_j) = j(2\lambda - n - j)\rho^{n-\lambda+j}f_j + O(\rho^{n-\lambda+j+1}).$$

Donc on a, par construction et grâce au choix de $\lambda \notin \frac{1}{2}(n+\mathbb{N})$,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \; (\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda}F_j) = O(\rho^{n-\lambda+j+1}). \tag{5.2}$$

Avec le lemme de Borel, il existe $F_\infty \in C^\infty(\overline{X})$ dont les coefficients de Taylor en $\rho = 0$ sont les f_j et avec (5.2) on a bien

$$(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda}F_\infty) = O(\rho^\infty), \;\; F_\infty|_{\rho=0} = f_0.$$

Ensuite, pour $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) \geq \frac{n}{2}\} \setminus \left(\frac{1}{2}(n+\mathbb{N}) \cup \mathrm{Res}(\Delta + V)\right)$, on pose

$$\mathcal{P}_V(\lambda)f = \rho^{n-\lambda}F_\infty(\lambda, f) + \widetilde{R}_V(\lambda)(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))(\rho^{n-\lambda}F_\infty(\lambda, f)).$$

On a bien une solution de notre problème de Poisson car on a rappelé dans la proposition 12 que $\widetilde{R}_V(\lambda)$ est continue de $\dot{C}^\infty(X)$ dans $\rho^\lambda C^\infty(X)$.

Il reste à montrer l'unicité. Soit

$$u_1 = \rho^\lambda F_1(\lambda) + \rho^{n-\lambda}G_1(\lambda), \;\; u_2 = \rho^\lambda F_2(\lambda) + \rho^{n-\lambda}G_2(\lambda)$$

deux solutions du même problème de Poisson avec $f \in C^\infty(\partial\overline{X})$ donnée. Alors, comme $\lambda \notin \frac{1}{2}(n+\mathbb{N})$, on peut montrer, en reprenant le calcul précédent (cf la formule donnant les f_j), que les développements de Taylor de G_1 et G_2 en $\rho = 0$ dont les premiers termes sont égaux à f, sont en fait identiques. Donc $u_1 - u_2 \in \rho^\lambda C^\infty(\overline{X})$ et il suffit donc de montrer qu'il n'y a pas de solution non triviale $v \in \rho^\lambda C^\infty(\overline{X})$ à $(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))v = 0$. Si $\mathrm{Re}\lambda > \frac{n}{2}$ alors $v \in L^2(\overline{X})$ ce qui est en contradiction avec le choix de $\lambda \notin \sigma_{pp}(\Delta + V) \subset \mathrm{Res}(\Delta + V)$. Pour $\mathrm{Re}\lambda = \frac{n}{2}$, $\lambda \neq \frac{n}{2}$ on va utiliser le lemme suivant

Lemme 17 *Pour* $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}$*, si* $v_1 = \rho^\lambda F_1(\lambda) + \rho^{n-\lambda} G_1(\lambda), v_2 = \rho^\lambda F_2(\lambda) + \rho^{n-\lambda} G_2(\lambda)$*, avec* $F_i, G_i \in C^\infty(\overline{X})$*,* $i = 1, 2$*, sont solutions de*

$$(\Delta + V - \lambda(n-\lambda))v_i = r_i$$

avec $r_i \in \dot{C}^\infty(X)$*, alors*

$$\int_{\overline{X}} v_1 r_2 - r_1 v_2 \,\mathrm{dvol}(g) = (n - 2\lambda) \int_{\partial \overline{X}} F_1 G_2 - G_1 F_2 \,\mathrm{dvol}(h(0)).$$

Preuve : Pour tout $\epsilon > 0$, on a, en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_{\rho \geq \epsilon} v_1 r_2 - r_1 v_2 \,\mathrm{dvol}(g) &= \int_{\rho \geq \epsilon} v_1(\Delta v_2) - (\Delta v_1) v_2 \,\mathrm{dvol}(g) \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{\rho = \epsilon} v_1(\partial_\rho v_2) - (\partial_\rho v_1) v_2 \,\mathrm{dvol}(h(\epsilon)).\end{aligned}$$

Or

$$\partial_\rho v_i = \lambda \rho^{\lambda - 1} F_i + \rho^\lambda \partial_\rho F_i + (n - \lambda) \rho^{n-\lambda-1} G_i + \rho^{n-\lambda} \partial_\rho G_i.$$

En remplaçant dans la formule précédente et en faisant tendre ϵ vers 0 tout en se souvenant que $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}$, on obtient le lemme. □

On peut appliquer ce lemme avec

$$v_1 := v = \rho^\lambda F_1, \quad v_2 := \widetilde{R}_V(\lambda)\phi = \rho^\lambda F_2$$

où $\phi \in \dot{C}^\infty(X)$. v_2 est bien définie car $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}\} \setminus \big(\{\frac{n}{2}\} \cup \mathrm{Res}(\Delta + V)\big)$. On a $r_1 = 0$ et $r_2 = \phi$, d'où

$$\int_{\overline{X}} v\phi \,\mathrm{dvol}(g) = 0$$

et ce pour toute $\phi \in \dot{C}^\infty(X)$. Donc $v = 0$, ce qui achève l'unicité du problème de Poisson. Cette unicité démontre aussi la linéarité de $\mathcal{P}_V(\lambda)$ et donc achève la démonstration de la proposition 13. □

Le lemme suivant décrit comment varie l'opérateur de Poisson quand on modifie le potentiel V par une isométrie.

Lemme 18 *Soit* $V \in \dot{C}^\infty(X)$*, et* $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) \geq \frac{n}{2}\} \setminus \big(\frac{1}{2}(n + \mathbb{N}) \cup \mathrm{Res}(\Delta + V)\big)$*. Pour toute isométrie* L *de* $\overline{X}$ *on a*

$$\mathcal{P}_{L^*V}(\lambda) = L^* \mathcal{P}_V(\lambda) L^{-1*}.$$

Preuve : Comme le laplacien commute avec les isométries, pour toute isométrie L on a

$$\Delta + L^*V - \lambda(n - \lambda) = L^*\big(\Delta + V - \lambda(n-\lambda)\big) L^{-1*}. \tag{5.3}$$

Prenons une fonction ρ définissant le bord de X qui soit invariante sous l'isométrie L. Alors par définition de l'opérateur de Poisson, pour toute $f \in C^\infty(\partial\overline{X})$, il existe $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ dans $C^\infty(\overline{X})$ telles que

$$\mathcal{P}_{L^*V}(\lambda)(f) = \rho^\lambda F(\lambda) + \rho^{n-\lambda} G(\lambda).$$

Grâce au choix de ρ on a

$$L^{-1*}\mathcal{P}_{L^*V}(\lambda)(f) = \rho^\lambda L^{-1*}F(\lambda) + \rho^{n-\lambda} L^{-1*}G(\lambda),$$

et, avec (5.3), $L^{-1*}\mathcal{P}_{L^*V}(\lambda)(f)$ est une solution de $\big(\Delta + V - \lambda(n-\lambda)\big)u = 0$. Donc

$$L^{-1*}\mathcal{P}_{L^*V}(\lambda)(f) = \mathcal{P}_V(\lambda)(L^{-1*}G(\lambda)\,|_{\partial\overline{X}}) = \mathcal{P}_V(\lambda)(L^{-1*}f). \;\square$$

5.3 Opérateur de diffusion

On définit maintenant l'opérateur de diffusion à partir de l'opérateur de Poisson.

Définition 6 *Pour $V \in \dot{C}^\infty(X)$ et $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) \geq \frac{n}{2}\} \setminus \big(\frac{1}{2}(n+\mathbb{N}) \cup \mathrm{Res}(\Delta+V)\big)$ on définit*

$$\begin{array}{rcl} S_V(\lambda) : C^\infty(\partial\overline{X}) & \longrightarrow & C^\infty(\partial\overline{X}) \\ f & \longrightarrow & F(\lambda)\,|_{\rho=0}, \end{array}$$

où F est définie par $\mathcal{P}_V(\lambda)(f) = \rho^\lambda F(\lambda) + \rho^{n-\lambda}G(\lambda)$ avec $G(\lambda)\,|_{\rho=0} = f$.

Remarque 11 *Là encore on peut s'affranchir de la dépendance de cette définition par rapport à la fonction définissant le bord de $\overline{X}$.*

J'ai envie de faire une autre remarque, même si V est complexe on a encore le résultat suivant :

Lemme 19 *Pour tout $V \in \dot{C}^\infty(X)$ et pour tout $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}\} \setminus (\{\frac{n}{2}\} \cup \mathrm{Res}(\Delta+V))$ on a*

$$S_V(n-\lambda)S_V(\lambda) = I.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition 13 avec f en λ et avec $S_V(\lambda)f$ en $n-\lambda$. On a

$$\mathcal{P}_V(\lambda)(f) = \rho^\lambda F_1(\lambda) + \rho^{n-\lambda}G_1(\lambda) \;\text{ avec }\; \begin{cases} F_1(\lambda)\,|_{\rho=0} = S_V(\lambda)f, \\ G_1(\lambda)\,|_{\rho=0} = f. \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_V(n-\lambda)(S_V(\lambda)f) = \rho^{n-\lambda}F_2(n-\lambda) + \rho^\lambda G_2(n-\lambda)$$
$$\text{avec } \begin{cases} F_2(n-\lambda)\,|_{\rho=0} = S_V(n-\lambda)S_V(\lambda)f, \\ G_2(n-\lambda)\,|_{\rho=0} = S_V(\lambda)f. \end{cases}$$

En utilisant l'étude des développements de Taylor en $\rho = 0$ faite dans la preuve du théorème 13, on montre que comme $F_1(\lambda)$ et $G_2(n-\lambda)$ ont le même premier coefficient ils ont un développement de Taylor identique au bord. Puis on peut réutiliser le lemme 17 pour montrer par unicité que $G_1(\lambda) = F_2(n-\lambda)$ et que donc $f = S_V(n-\lambda)S_V(\lambda)f$. $\square$

Par contre le fait que V soit complexe implique que, pour $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}\} \setminus (\{\frac{n}{2}\} \cup \mathrm{Res}(\Delta + V))$ et $f \in C^\infty(\partial\overline{X})$, la relation $\overline{S_V(\lambda)f} = S_V(\overline{\lambda})\overline{f}$ est fausse et est remplacée par $\overline{S_V(\lambda)f} = S_{\overline{V}}(\overline{\lambda})\overline{f}$. On ne peut donc pas utiliser le principe de réflexion de Schwarz pour prolonger l'opérateur de diffusion au-delà de l'axe $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}$ comme cela est fait pour le laplacien sans potentiel dans [GZ03]. Par contre les travaux de Joshi et Sà Barreto ([JSB00]) qui relient le noyau de l'opérateur de diffusion à celui de la résolvante sont encore valables pour un potentiel complexe, en effet la seule hypothèse nécessaire est que V s'annule au bord de X. On a donc

Proposition 14 *Pour tout $V \in \dot{C}^\infty(X)$, S_V se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ avec des pôles de rang fini.*

Enfin l'opérateur de diffusion a le même comportement que l'opérateur de Poisson quand on compose V avec une isométrie,

Lemme 20 *Soit $V \in \dot{C}^\infty(X)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \mathrm{Res}(\Delta + V))$, et pour toute isométrie L de $\overline{X}$ on a*

$$S_{L^*V}(\lambda) = L^* S_V(\lambda) L^{-1*}.$$

Preuve : c'est direct par définition de l'opérateur de diffusion et grâce au lemme 18.

5.4 Caractère isophase des potentiels isorésonants

La phase de l'opérateur de diffusion est définie dans [Chr06] comme étant le logarithme de son déterminant. Mais dans notre cadre $S_V - 1$ n'est pas un opérateur à trace, on ne peut donc pas définir directement son déterminant. Par contre on peut définir le déterminant de l'opérateur de diffusion relatif : $\det(S_V(\lambda)S_0(\lambda)^{-1})$ qui est méromorphe-fini pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On va montrer que pour nos potentiels isorésonants introduits dans les chapitres précédents, ce déterminant est constant égal à 1 et que donc S_V et S_0 ont les mêmes pôles dans $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Ensuite on peut définir la multiplicité d'un pôle $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ de l'opérateur de diffusion par

$$\nu_V(\lambda_0) := \mathrm{Tr}\big(\mathrm{res}_{\lambda_0}(S_V(\lambda)^{-1}\partial_\lambda S_V(\lambda))\big),$$

où res_{λ_0} désigne le résidu en λ_0 (voir par exemple [BP02] et [Gui05b]). Là encore on va montrer que pour nos potentiels isorésonants on a $\nu_V(\lambda) = \nu_0(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

La relation entre les pôles de l'opérateur de diffusion et les pôles de la résolvante a été étudiée dans [BP02] puis précisée dans [Gui05b]. On a

Théorème 8 *Pour tout $V \in \dot{C}^\infty(X)$ et tout $\lambda_0 \in D_N^+ \cap \{\mathrm{Re}(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ tel que $\lambda_0 \notin \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \lambda(n-\lambda) \in \sigma_{pp}(\Delta + V)\} \cap \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, λ_0 est un pôle de $\widetilde{R}_V$ si et seulement si c'est un pôle de S_V et on a*

$$m_V(\lambda_0) = m_V(n - \lambda_0) - \nu_V(\lambda_0)$$

où $m_V(\lambda_0)$ est la multiplicité de λ_0 en tant que pôle de $\widetilde{R}_V$.

Guillarmou fait la preuve de cette formule de multiplicité sans potentiel dans [Gui05b] mais elle s'adapte sans changement à un potentiel qui s'annule au bord de $\overline{X}$. La formule donnée dans [Gui05b] est plus complète que celle que je rappelle dans le théorème 8 car elle traite aussi des points $\frac{n}{2} - \mathbb{N}$.

Remarque 12 *On voit que si on a un potentiel V tel que, pour tout $\lambda \in \{\mathrm{Re}(\lambda) < \frac{n}{2}\}$, $\nu_V(\lambda) = \nu_0(\lambda)$ alors on peut en déduire $m_V(\lambda) = m_0(\lambda)$ à condition de savoir que $m_V(n-\lambda) = m_0(n-\lambda)$, c'est-à-dire que $\Delta + V$ et Δ ont le même spectre dans le domaine physique $\{\mathrm{Re}(\lambda) > \frac{n}{2}\}$. De plus on ne peut rien dire sur la droite critique $\{\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{n}{2}\}$. Le théorème 8 ne suffit donc pas à prouver l'isorésonance de nos potentiels.*

Montrons les deux propriétés annoncées de nos potentiels isorésonants.

Théorème 9 *Soit X une variété asymptotiquement hyperbolique qui possède une action isométrique de $\mathbb{S}^1$ vérifiant l'hypothèse D. Soit $V \in \dot{C}^\infty(X)$ le potentiel*

$$V = \sum_{m=1}^{+\infty} V_m,$$

où les $V_m \in L^\infty(X)$ sont $\mathbb{S}^1$ homogènes de poids m et tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant $\sum_{m=1}^{+\infty} \| V_m \|_\infty (1+\varepsilon)^m < +\infty$.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, on a

$$\det(S_V(\lambda) S_0(\lambda)^{-1}) = 1,$$

et les pôles de S_V et S_0 ont la même multiplicité :

$$\nu_V(\lambda) = \nu_0(\lambda).$$

Remarque 13 *On a déjà remarqué que avec un $V \in \dot{C}^\infty(X)$ les hypothèses $A_{N,\rho}$ et $B_{N,\rho}$ sont toutes les deux vérifiées sur D_N^+ et ce pour tout N. De plus avec un tel V on a bien $\rho^{-(N+1)} V \widetilde{R}_0(\lambda) \rho^N$ qui est dans une classe de Schatten pour tout $\lambda \in D_N^+ \setminus \mathrm{Res}(\Delta)$. Grâce au théorème 4, les potentiels du théorème 9 sont bien isorésonants.*

Preuve : on reprend les arguments de [Chr06] et [Chr08]. On considère donc, $W(z) := \sum_{m=1}^{\infty} z^m V_m$ dont les hypothèses du théorème 9 permettent de dire qu'il est bien défini et holomorphe pour $z \in \Omega$, un domaine de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Déjà, on peut remarquer que $W(1) = V$ et que, grâce à l'homogénéité des V_m, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $W(e^{i\theta}) = e^{i\theta}.W(1)$. On rappelle que pour toute fonction f définie sur X, on note $e^{i\theta}.f$ l'application qui à $x \in X$ associe $f(e^{-i\theta}.x)$. On note dans la suite R_θ^* l'opérateur qui a une fonction $f \in L^2(X)$ associe $e^{i\theta}.f$.

Commençons par prouver l'égalité sur les multiplicités. Pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\nu_{W(z)}(\lambda)$ est bien définie et à valeurs entières. Fixons $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$; alors $z \to \nu_{W(z)}(\lambda)$ est holomorphe sur Ω à valeurs entières et donc constante. On a notamment

$$\nu_V(\lambda) = \nu_{W(1)}(\lambda) = \nu_{W(0)}(\lambda) = \nu_0(\lambda).$$

Avec ce qu'on vient de faire sur les multiplicités des singularités de l'opérateur de diffusion, on peut définir $H(z, \lambda) := \det(S_{W(z)}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1})$ pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. De plus, une fois λ fixé, $z \to H(z, \lambda)$ est holomorphe dans Ω. On va montrer qu'elle est constante sur le cercle unité. Pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, on a

$$\det(S_{W(e^{i\theta})}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}) = \det(S_{R_\theta^* W(1)}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}).$$

On utilise le lemme 20, d'où

$$\det(S_{W(e^{i\theta})}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}) = \det(R_\theta^* S_{W(1)}(\lambda)R_{-\theta}^* S_0(\lambda)^{-1}).$$

Si on réutilise encore le lemme 20 avec cette fois $V = 0$ on a que $R_{-\theta}^*$ et $S_0(\lambda)^{-1}$ commutent et donc

$$\det(S_{W(e^{i\theta})}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}) = \det(R_\theta^* S_{W(1)}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}R_{-\theta}^*) = \det(S_{W(1)}(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}),$$

donc $H(., \lambda)$ est bien constante sur le cercle unité et donc constante sur Ω. D'où

$$\det(S_V(\lambda)S_0(\lambda)^{-1}) = H(1, \lambda) = H(0, \lambda) = 1. \quad \square$$

Annexe A

Perturbations des résonances

Il s'agit ici de rappeler la théorie des perturbations des résonances développée par Agmon dans [Agm98]. L'idée principale est que, pour étudier les résonances d'un opérateur P on construit localement un opérateur auxiliaire P_Γ qui a un spectre discret et dont les valeurs propres sont exactement les résonances de P. On obtient alors une théorie des perturbations des résonances en appliquant la théorie des perturbations des valeurs propres de Kato à P_Γ.

On donnera les principales étapes de cette construction et pour les détails et les démonstrations on renvoie à [Agm98]. On vérifiera aussi que les hypothèses nécessaires à cette construction sont bien vérifiées dans les cas où je l'applique (chapitres 1 et 3).

A.1 Cadre et hypothèses

Soit P un opérateur fermé agissant sur un Banach B et de domaine $\mathrm{Dom}\,(P)$ dense dans B. On note respectivement $\sigma(P)$, $\sigma_{dis}(P)$ le spectre et le spectre discret de P. Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ tel que $(\sigma(P) \cap D) \subset \sigma_{dis}(P)$. La résolvante $R(\lambda) := (P - \lambda)^{-1}$ est alors méromorphe-finie sur D à valeurs dans $\mathcal{L}(B)$.

Soient B_0, B_1 des espaces de Banach réflexifs tels que

$$B_0 \overset{J_0}{\hookrightarrow} L^2(X) \overset{J}{\hookrightarrow} B_1,$$

où J_0 et J sont des injections continues et $J_0(B_0)$ est dense dans $L^2(X)$ et $J(L^2(X))$ est dense dans B_1. On pose, pour $\lambda \in D \setminus \sigma_{dis}(P)$,

$$\widetilde{R}(\lambda) = JR(\lambda)J_0.$$

$\widetilde{R}$ est méromorphe-finie sur D à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$.

On fait une hypothèse de prolongement :

Hypothèse (α) : $\widetilde{R}$ a un prolongement méromorphe-fini de D sur un domaine $D_+ \supset D$.

On rappelle alors la définition des résonances :

Définition 7 *On appelle résonances les pôles de* $\widetilde{R}$ *dans* D_+ *et on note* $\mathrm{Res}(P)$ *l'ensemble de ces pôles.*

Dans le cas où B_0 et B_1 sont des espaces L^2 à poids (ce qui est le cas dans nos utilisations), cette définition ne dépend pas des choix de B_0 et B_1 (cf la remarque 4.2 de [Agm98]). C'est-à-dire que si $\widehat{B}_0$ et $\widehat{B}_1$ vérifient les mêmes hypothèses que B_0 et B_1 et que la résolvante correspondante $\widehat{R}(\lambda) = \widehat{J}R(\lambda)\widehat{J}_0$ (avec $\widehat{J}_0 : \widehat{B}_0 \hookrightarrow B$ et $\widehat{J} : B \hookrightarrow \widehat{B}_1$) admet un prolongement méromorphe fini de D sur D_+, alors $\widetilde{R}$ et $\widehat{R}$ ont les mêmes pôles dans D_+.

Ensuite, on considère P comme un opérateur agissant sur B_1. On note $\mathcal{P}_1$ cet opérateur, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(\mathcal{P}_1) &= J\mathrm{Dom}\,(P) \\ \mathcal{P}_1(Ju) &= JPu \quad \text{pour} \quad u \in \mathrm{Dom}\,(P). \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse suivante sur $\mathcal{P}_1$:

Hypothèse (β) : $\mathcal{P}_1$ est fermable dans B_1.

On note P_1 sa fermeture. Dans l'erratum de [Agm98] Agmon impose une hypothèse de plus sur P_1 :

Hypothèse (γ) : Il existe $\lambda_0 \in D$ tel que $R_1(\lambda_0) := (P_1 - \lambda_0)^{-1}$ existe.

Dans la suite on supposera toujours ces trois conditions vérifiées.

A.2 Quelques résultats intermédiaires

Énonçons un premier résultat concernant P_1.

Proposition 15 [Agm98][Proposition 5.2]
On a

$$\mathrm{Ran}\ \widetilde{R}(\lambda) \subset \mathrm{Dom}\,(P_1)$$

et

$$(P_1 - \lambda)\widetilde{R}(\lambda)f = f,$$

pour tout $\lambda \in D_+ \setminus \mathrm{Res}(P)$ *et toute* $f \in B_0$.

Soit $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(P)$ un pôle d'ordre p de $\widetilde{R}$. Dans un voisinage de λ_0 privé de λ_0, $\widetilde{R}$ admet un développement de Laurent :

$$\widetilde{R}(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_0)^{-i} \widetilde{S}_i + \widetilde{H}(\lambda),$$

où $\widetilde{S}_i \in \mathcal{L}(B_0, \mathcal{D}(P_1))$ avec $\widetilde{S}_p \neq 0$ et $\widetilde{H}(\lambda)$ holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, \mathcal{D}(P_1))$. $\mathcal{D}(P_1)$ est l'espace de Banach $\mathrm{Dom}\,(P_1)$ considéré avec la norme du graphe.

En utilisant la proposition 15 et la relation $(P_1 - \lambda_0)\widetilde{R}(\lambda) = 1 + (\lambda - \lambda_0)\widetilde{R}(\lambda)$, on obtient

$$\begin{aligned} (P_1 - \lambda_0)\widetilde{S}_i &= \widetilde{S}_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1 \\ (P_1 - \lambda_0)\widetilde{S}_p &= 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Définition 8 *On appelle espace résonant généralisé de λ_0 le sous espace vectoriel de dimension finie de* Dom (P_1)

$$E_{\lambda_0} := \sum_{1 \leq i \leq p} \mathrm{Ran}\ \widetilde{S}_i.$$

La dimension de ce dernier est appelée multiplicité de la résonance λ_0.

Remarque 14 *En fait on a $P_1\widetilde{R}(\lambda)u = \widetilde{R}(\lambda)P_0u$ pour tout $u \in \mathcal{F}(P) := \{u \in B_0 \cap \mathrm{Dom}\,(P) \ : \ Pu \in B_0\}$ où P_0 est l'opérateur fermé sur B_0 restriction de P à $\mathcal{F}(P)$. Cette égalité est vraie pour tout $\lambda \in D \setminus \mathrm{Res}(P)$ puis pour tout $\lambda \in D_+ \setminus \mathrm{Res}(P)$ par prolongement analytique. On en déduit que pour toute résonance $\lambda_0 \in D_+$, on a grâce à (A.1), pour tout $u \in \mathcal{F}(P)$,*

$$\widetilde{S}_{i+1}u = (P_1 - \lambda_0)\widetilde{S}_i u = \widetilde{S}_i(P_0 - \lambda_0)u.$$

Dans nos applications, avec $P = \Delta$, on a $\mathcal{F}(P)$ dense dans B_0 (car contient C_0^∞) et donc

$$\mathrm{Ran}\ \widetilde{S}_{i+1} \subset \mathrm{Ran}\ \widetilde{S}_i$$

et finalement $E_{\lambda_0} = \mathrm{Ran}\ \widetilde{S}_1$ et alors on retrouve bien la définition d'espace résonant qu'on a donnée précédemment (cf 1).

A.3 Lien entre résonances et valeurs propres

On va définir localement l'opérateur auxiliaire dont les valeurs propres sont les résonances de P dans D_+. Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ de bord Γ de classe C^1, tel que $\overline{U} \subset D_+$ et $\Gamma \cap \mathrm{Res}(P) = \varnothing$. Soit

$$B_\Gamma = \{f \in B_1 \ ; \ f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi, \ \ g \in B_0, \Phi \in C(\Gamma, B_0)\},$$

où $C(\Gamma, B_0)$ est l'espace des fonctions continues sur Γ à valeurs dans B_0. Muni de la norme

$$\| f \|_{B_\Gamma} = \inf_{g,\Phi}(\| g \|_{B_0} + \| \Phi \|_{C(\Gamma,B_0)}),$$

où l'infimum est pris sur toutes les $g \in B_0$ et $\Phi \in C(\Gamma, B_0)$ telles que $f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi$, B_Γ est un Banach. On a

$$B_0 \subset B_\Gamma \subset B_1$$

et les injections canoniques sont continues.

Pour toute $f = g + \int_\Gamma \widetilde{R}(\xi)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi \in B_\Gamma$,

$$R_\Gamma(\lambda)f := \widetilde{R}(\lambda)g + \int_\Gamma (\xi-\lambda)^{-1}\big(\widetilde{R}(\xi) - \widetilde{R}(\lambda)\big)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

ne dépend pas des $(g,\Phi) \in B_0 \times C(\Gamma, B_0)$ choisis.

On peut alors définir l'opérateur auxiliaire P_Γ, comme étant l'opérateur linéaire fermé sur B_Γ dont R_Γ est la résolvante. C'est-à-dire :

Définition 9 *Pour tout* $\lambda_0 \in U \setminus \mathrm{Res}(P)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma) &= \mathrm{Ran}\ R_\Gamma(\lambda_0) \\ P_\Gamma u &= \lambda_0 u + f,\ \textit{pour tout}\ u = R_\Gamma(\lambda_0)f,\ f \in B_\Gamma. \end{aligned}$$

Cette définition ne dépend pas du λ_0 *choisi.*

Les premières propriétés concernant P_Γ sont les suivantes

Proposition 16

- *Pour toute* $f \in B_0$ *et tout* $\lambda \in U \setminus \mathrm{Res}(P)$ *on a*

$$R_\Gamma(\lambda)f = \widetilde{R}(\lambda)f.$$

- P_1 *est une extension de* P_Γ *au sens où :*

$$\mathrm{Dom}\,(P_\Gamma) \subset \mathrm{Dom}\,(P_1)$$

et

$$P_\Gamma u = P_1 u \ \textit{ pour tout }\ u \in \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma).$$

Le résultat attendu est le théorème suivant qui relie les valeurs propres de P_Γ aux résonances de P dans U.

Théorème 10 [Agm98][Théorème 6.7]

(i) P_Γ *a un spectre discret dans* U *qui est exactement l'ensemble des pôles de* $\widetilde{R}$ *dans* U.

(ii) Soit $\lambda_0 \in \mathrm{Res}(P) \cap U$ *et l'espace propre de* P_Γ *correspondant à* λ_0

$$E^\Gamma_{\lambda_0} := \mathrm{Ran}\ \int_{\mathcal{C}} R_\Gamma(\xi)\mathrm{d}\xi \subset \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma),$$

où $\mathcal{C} \subset U \setminus \mathrm{Res}(P)$ *est un petit cercle autour de* λ_0. *Alors* $E^\Gamma_{\lambda_0} = E_{\lambda_0}$.

(iii) $P_1 = P_\Gamma$ *sur* $E^\Gamma_{\lambda_0}$.

Remarque 15 *L'ordre de* λ_0 *en tant que pôle de* $\widetilde{R}$ *dans* U *est égal à son ordre en tant que pôle de* R_Γ.

A.4 Théorie des perturbations des résonances

Soit Ω un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ voisinage de 0. Pour $t \in \Omega$, on étudie la famille des perturbations de P :

$$P(t) = P + V(t)$$

où $V(t)$ est une famille d'opérateurs de B dans B telle que, pour tout $t \in \Omega$, $\mathrm{Dom}\,(V(t)) = \mathrm{Dom}\,(P)$ et telle que $V(0) = 0$. On suppose de plus

Hypothèses (δ) :

(a) Ran $V(t) \subset B_0$ pour tout $t \in \Omega$.

(b) Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\,(P)$ et pour tout $t \in \Omega$,

$$\| V(t)u \|_{B_0} \leq C(t)\big(\| Pu \|_{B_1} + \| u \|_{B_1} \big)$$

où C est une fonction localement bornée sur Ω.

(c) Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\,(P)$,

$$\begin{array}{ccl} \Omega & \rightarrow & B_0 \\ t & \rightarrow & V(t)u \text{ est holomorphe.} \end{array}$$

Les hypothèses (δ) assurent que la famille $\{P(t)\}_{t\in\Omega}$ est holomorphe de type A au sens de Kato. On rappelle que cela veut dire que, pour tout $t \in \Omega$, le domaine de $P(t)$ est indépendant de t et que, pour toute fonction ψ dans ce domaine, $P(t)\psi$ est holomorphe en t.

On a alors

Proposition 17 [Agm98][Proposition 7.2] *Sous les hypothèses (δ), il existe une unique famille d'opérateurs $V_1(t) : B_1 \to B_1$, définie pour $t \in \Omega$, avec $V_1(0) = 0$ et*

(i) Pour tout $t \in \Omega$, $\mathrm{Dom}\,(V_1(t)) = \mathrm{Dom}\,(P_1)$ et $\mathrm{Ran}\,(V_1(t)) \subset B_0$.

(ii) Pour tout $t \in \Omega$, $V_1(t)$ est relativement borné par rapport à P_1.

(iii) Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\,(P_1)$, $\Omega \ni t \to V_1(t)u$ est une fonction holomorphe à valeurs dans B_0.

(iv) Pour tout $u \in \mathrm{Dom}\,(P)$, pour tout $t \in \Omega$, $V_1(t)u = V(t)u$.

Fixons $\lambda_0 \in D_+ \cap \mathrm{Res}(P)$. On considère 3 domaines du plan complexe D', D'_+ et U tels que $D' \Subset D$ ($A \Subset B$ signifie A est compact et inclus dans B) et

$$D' \Subset D'_+ \Subset U \Subset D_+.$$

On suppose aussi que $\lambda_0 \in D'_+$ et que U a un bord Γ de classe C^1 tel que $\Gamma \cap \mathrm{Res}(P) = \varnothing$. On peut donc introduire comme précédemment l'espace de Banach B_Γ et l'opérateur P_Γ associé à P.

Ensuite, pour tout $t \in \Omega$, on peut définir $V_\Gamma(t) : B_\Gamma \to B_\Gamma$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(V_\Gamma(t)) &= \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma) \\ V_\Gamma(t)u &= V_1(t)u, \ \ \forall u \in \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma). \end{aligned}$$

Puis l'opérateur $P_\Gamma(t) : B_\Gamma \to B_\Gamma$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma(t)) &= \mathrm{Dom}\,(P_\Gamma) \\ P_\Gamma(t) &= P_\Gamma + V_\Gamma(t). \end{aligned}$$

Quitte à restreindre Ω, on a

Proposition 18 [Agm98][Proposition 7.3] *$\{P_\Gamma(t)\}_{t\in\Omega}$ est une famille holomorphe de type A au sens de Kato.*

La théorie des perturbations des valeurs propres de Kato donne alors,

Théorème 11 [Agm98][Théorème 7.4] *Pour tout $t \in \Omega$, $P_\Gamma(t)$ a un spectre discret dans D'_+. Ses valeurs propres sont les racines d'un polynôme dont le degré ne dépend pas de t et dont les coefficients sont analytiques en t.*

Soient

$$\begin{aligned} R(\lambda, t) &:= (P(t) - \lambda)^{-1}, \ t \in \Omega, \ \lambda \in D', \\ R_\Gamma(\lambda, t) &:= (P_\Gamma(t) - \lambda)^{-1}, \ t \in \Omega, \ \lambda \in D'_+. \end{aligned}$$

La deuxième est méromorphe en λ sur D'_+ à valeurs dans $\mathcal{L}(B_\Gamma)$. Soit

$$\widetilde{R}(\lambda, t) := JR(\lambda, t)J_0, \ t \in \Omega, \ \lambda \in D',$$

qui a priori est méromorphe dans D' à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$ et Agmon montre qu'on a

Théorème 12 [Agm98][Théorème 7.5] *Pour tout $t \in \Omega$, $\widetilde{R}(\lambda, t)$ admet un prolongement méromorphe fini de D' à D'_+.*

Remarque 16 *C'est l'hypothèse (α) pour les $\{P(t)\}_{t\in\Omega}$. En fait la famille $\{P(t)\}_{t\in\Omega}$ vérifie les hypothèses (α), (β) et (γ) uniformément en t en remplaçant D et D_+ par D' et D'_+.*

Finalement on a le pendant du théorème 10 pour les opérateurs perturbés :

Théorème 13 [Agm98][Corollaire 7.8] *Pour $t \in \Omega$ fixé, $\widetilde{R}(\lambda, t)$ et $R_\Gamma(\lambda, t)$ possèdent les mêmes pôles dans D'_+. De plus $\lambda_t \in D'_+$ est un pôle de multiplicité m de $R_\Gamma(\lambda, t)$ (i.e. une valeur propre de multiplicité m de $P_\Gamma(t)$) si et seulement si λ_t est un pôle de multiplicité m de $\widetilde{R}(\lambda, t)$. L'ordre des pôles est également le même.*

A.5 Applications

Il s'agit ici de voir que cette théorie des perturbations des résonances s'applique bien au cadre de ma thèse excepté le cas de la caténoïde où on ne s'est pas servi des résultats d'Agmon.

On considère une variété riemannienne (X, g) connexe, non compacte, de dimension $n \geq 2$. Sur X, on s'intéresse au laplacien Δ opérant sur $B := L^2(X)$ avec pour domaine $H^2(X)$. Avec ρ une fonction définissant le bord de X (ou $\rho(z) = e^{-\langle z \rangle}$ si X est l'espace euclidien) et $N \in \mathbb{N}$, on prend

$$B_0 := \rho^N L^2(X) \quad \text{et} \quad B_1 := \rho^{-N} L^2(X).$$

Muni des normes héritées de $L^2(X)$, c'est-à-dire, pour $u \in B_0$, $\| u \|_{B_0} = \| \rho^{-N} u \|_{L^2(X)}$ et, pour $v \in B_1$, $\| v \|_{B_1} = \| \rho^N v \|_{L^2(X)}$, ce sont des espaces de Banach réflexifs tels que

$$B_0 \overset{J_0}{\hookrightarrow} L^2(X) \overset{J}{\hookrightarrow} B_1,$$

où J_0 et J sont des injections continues et $J_0(B_0)$ est dense dans $L^2(X)$ et $J(L^2(X))$ est dense dans B_1.

La résolvante du laplacien libre $\widetilde{R}_0(\lambda) = J(\Delta - f(\lambda))^{-1} J_0$ est a priori définie et holomorphe sur un domaine non borné D de Σ. Alors l'hypothèse $A_{N,\rho}$ assure que $\widetilde{R}_0$ a un prolongement méromorphe-fini sur un domaine D_N^+ à valeurs dans $\mathcal{L}(B_0, B_1)$. C'est exactement l'hypothèse (α).

On définit ensuite l'opérateur $\mathcal{P}_1$ de domaine $JH^2(X) \subset B_1$ par

$$\mathcal{P}_1(Ju) = J\Delta u, \quad \forall u \in H^2(X).$$

Pour avoir l'hypothèse (β) il faut vérifier que $\mathcal{P}_1$ est fermable. Or $H^2(X)$ est dense dans $B = L^2(X)$ qui lui-même est dense dans B_1 donc le domaine de $\mathcal{P}_1$ est dense dans B_1 et donc son adjoint $\mathcal{P}_1^*$ existe. Pour montrer que $\mathcal{P}_1$ est fermable il suffit de montrer que le domaine de $\mathcal{P}_1^*$ est dense dans B_1^*. Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(\mathcal{P}_1^*) &= \{u \in B_1^* \cap \mathrm{Dom}\,(\Delta^*)\ ;\ \Delta^* u \in B_1^*\} \\ &= \{u \in B_1^* \cap H^2(X)\ ;\ \Delta u \in B_1^*\} \end{aligned}$$

De plus, on peut voir qu'à tout élément de B_0 on peut associer, grâce au produit scalaire $L^2(X)$, une forme linéaire continue sur B_1 et donc on a $B_0 \subset B_1^*$. Donc on a $\{u \in B_0 \cap H^2(X)\ ;\ \Delta u \in B_0\} \subset \mathrm{Dom}\,(\mathcal{P}_1^*)$. Ensuite on peut dire pour conclure que $C_0^\infty(X)$ est inclus dans $\{u \in B_0 \cap H^2(X)\ ;\ \Delta u \in B_0\}$ et dense dans B_1^* car il est dense dans B et que $B_1^* \subset B^* = B$. Donc le domaine de $\mathcal{P}_1^*$ est bien dense dans B_1^* et $\mathcal{P}_1$ est bien fermable. On note P_1 sa fermeture.

Il s'agit maintenant de vérifier l'hypothèse (γ) c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_0 \in D$ tel que $P_1 - f(\lambda_0)$ soit inversible. Vu la définition de B_1 et $\mathcal{P}_1$, cela revient à montrer qu'il existe $\lambda_0 \in D$ tel que $\rho^N \Delta \rho^{-N} - f(\lambda_0)$ est inversible dans $L^2(X)$. Or

$$\rho^N \Delta \rho^{-N} - f(\lambda) = \Delta - f(\lambda) + \rho^N [\Delta, \rho^{-N}],$$

et pour tout $\lambda \in D$, $\Delta - f(\lambda)$ est inversible donc

$$\rho^N \Delta \rho^{-N} - f(\lambda) = \big(1 + \rho^N [\Delta, \rho^{-N}] R_0(\lambda)\big)(\Delta - f(\lambda)).$$

De plus la norme de $R_0(\lambda)$ tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$ et dans tous les exemples de variétés sur lesquelles je construis mes potentiels isorésonants $[\Delta, \rho^{-N}]$ est de la forme $\rho^{-N}Q$ avec Q un opérateur différentiel d'ordre 1 à coefficients réguliers et donc continu de $H^2(X)$ dans $L^2(X)$. Par exemple, pour $X = \mathbb{H}^n$ on a $Q = 2N\rho\partial_\rho - N^2 - (n-1)N$. Donc il existe $\lambda_0 \in D$ tel que la norme de $\rho^N[\Delta, \rho^{-N}]R_0(\lambda_0)$ soit strictement plus petite que 1 et donc $\rho^N \Delta \rho^{-N} - f(\lambda_0)$ est inversible.

Enfin il ne reste plus qu'à vérifier qu'on peut appliquer la théorie des perturbations des résonances d'Agmon en perturbant le laplacien par nos potentiels isorésonants V qui, on le rappelle, vérifient l'hypothèse $B_{N,\rho}$, et notamment $\rho^{-2N}V$ est borné sur X. Vérifions donc que la famille $tV, t \in \mathbb{C}$ satisfait les hypothèses (δ). Pour tout $t \in \mathbb{C}$ et pour tout $u \in L^2(X)$, on a $tVu = \rho^N \rho^{-N} tVu \in B_0 = \rho^N L^2(X)$ car $\rho^{-2N}V$ est borné. Ensuite, si $u \in H^2(X)$, alors pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \| tVu \|_{B_0} &= \| \rho^{-N} tVu \|_{L^2(X)} = \| \rho^{-2N} tV \rho^N u \|_{L^2(X)} \\ &\leq C(V)\ |t|\ \| \rho^N u \|_{L^2(X)} = C(V)\ |t|\ \| u \|_{B_1}\ . \end{aligned}$$

Enfin $t \to tV$ est bien sûr holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a donc bien les trois points de l'hypothèse (δ).

Bibliographie

[Agm98] Shmuel Agmon : A perturbation theory of resonances. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(11-12):1255–1309, 1998.

[AS64] Milton Abramowitz et Irene A. Stegun : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 de *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon et Edmond Mazet : *Le spectre d'une variété riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[BP02] David Borthwick et Peter Perry : Scattering poles for asymptotically hyperbolic manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(3):1215–1231 (electronic), 2002.

[CdV79] Yves Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. I. Le cas non intégrable. *Duke Math. J.*, 46(1):169–182, 1979.

[Chr06] Tanya Christiansen : Schrödinger operators with complex-valued potentials and no resonances. *Duke Math. J.*, 133(2):313–323, 2006.

[Chr08] Tanya Christiansen : Isophasal, isopolar, and isospectral Schrödinger operators and elementary complex analysis. *Amer. J. Math.*, 130(1):49–58, 2008.

[FH91] William Fulton et Joe Harris : *Representation theory*, volume 129 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[Gas80] M. G. Gasymov : Spectral analysis of a class of second-order nonselfadjoint differential operators. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1):14–19, 96, 1980.

[GK71] I. C. Gohberg et M. G. Krejn : *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*. Dunod, Paris, 1971. Traduit du russe par Guy Roos, Monographies Universitaires de Mathématiques, No. 39.

[GU83] Victor Guillemin et Alejandro Uribe : Spectral properties of a certain class of complex potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279(2):759–771, 1983.

[Gui04] C. GUILLARMOU : Résonances sur les variétés asymptotiquement hyperboliques. Thèse, Université de Nantes, http ://tel.ccsd.cnrs.fr, 2004.

[Gui05a] Colin GUILLARMOU : Meromorphic properties of the resolvent on asymptotically hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 129(1):1–37, 2005.

[Gui05b] Colin GUILLARMOU : Resonances and scattering poles on asymptotically hyperbolic manifolds. *Math. Res. Lett.*, 12(1):103–119, 2005.

[GZ95a] Laurent GUILLOPÉ et Maciej ZWORSKI : Polynomial bounds on the number of resonances for some complete spaces of constant negative curvature near infinity. *Asymptotic Anal.*, 11(1):1–22, 1995.

[GZ95b] Laurent GUILLOPÉ et Maciej ZWORSKI : Upper bounds on the number of resonances for non-compact Riemann surfaces. *J. Funct. Anal.*, 129(2):364–389, 1995.

[GZ03] C. Robin GRAHAM et Maciej ZWORSKI : Scattering matrix in conformal geometry. *Invent. Math.*, 152(1):89–118, 2003.

[JSB00] Mark S. JOSHI et Antônio SÁ BARRETO : Inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds. *Acta Math.*, 184(1):41–86, 2000.

[Kat66] Tosio KATO : *Perturbation theory for linear operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[Mel93] Richard B. MELROSE : *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, volume 4 de *Research Notes in Mathematics.* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.

[Mel94] Richard B. MELROSE : Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces. *In Spectral and scattering theory (Sanda, 1992)*, volume 161 de *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 85–130. Dekker, New York, 1994.

[Mel95] Richard B. MELROSE : *Geometric scattering theory.* Stanford Lectures. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[MM87] Rafe R. MAZZEO et Richard B. MELROSE : Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, 75(2):260–310, 1987.

[RS80] Michael REED et Barry SIMON : *Methods of modern mathematical physics. I.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second édition, 1980. Functional analysis.

[SB99] Antônio SÁ BARRETO : Lower bounds for the number of resonances in even-dimensional potential scattering. *J. Funct. Anal.*, 169(1):314–323, 1999.

[SBZ95] Antônio SÁ BARRETO et Maciej ZWORSKI : Existence of resonances in three dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 173(2):401–415, 1995.

[Ser71] Jean-Pierre SERRE : *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1971. Deuxième édition, refondue.

[Sim96] Barry SIMON : *Representations of finite and compact groups*, volume 10 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Str72] Robert S. STRICHARTZ : A functional calculus for elliptic pseudo-differential operators. *Amer. J. Math.*, 94:711–722, 1972.

[WZ00] Jared WUNSCH et Maciej ZWORSKI : Distribution of resonances for asymptotically Euclidean manifolds. *J. Differential Geom.*, 55(1):43–82, 2000.

[Yaf92] Dimitri R. YAFAEV : *Mathematical scattering theory*, volume 105 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. General theory, Translated from the Russian by J. R. Schulenberger.

Résumé : Dans cette thèse on considère le prolongement méromorphe fini de la résolvante du laplacien libre sur une variété riemannienne connexe non compacte de dimension n supérieure ou égale à 2. Ses pôles sont appelés *résonances*. On suppose que la variété possède certaines symétries comme $\mathbb{S}^1$, $(\mathbb{S}^1)^m$ ou encore $SO(n)$. Avec cette hypothèse, on construit des potentiels V dits *isorésonants* c'est-à-dire tels que $\Delta + V$ ait les mêmes résonances que le laplacien libre avec les mêmes multiplicités. Au passage on est amené à estimer le bas du spectre du laplacien agissant sur les fonctions $\mathbb{S}^1$ homogènes à support compact. On montre également que ces potentiels isorésonants peuvent modifier l'ordre des résonances. Enfin, les résonances sont parfois définies comme pôles de l'opérateur de diffusion : on montre que dans ce cadre on a aussi l'isorésonance de nos potentiels.

Mots clés : laplacien, résonances, symétries, perturbation, diffusion.

Summary : In this PhD thesis we consider the finite meromorphic continuation of the resolvent of the free Laplacian on complete manifolds with dimension $n \geq 2$. The poles of this continuation are called *resonances*. We assume that the manifold has some symmetries like $\mathbb{S}^1$, $(\mathbb{S}^1)^m$ or $SO(n)$. With this condition, we construct potentials V which are *isoresonant* i.e. such that $\Delta + V$ has the same resonances as the free Laplacian with the same multiplicities. During this construction we had to find an estimate of the first term of the spectrum of the Laplacian acting on $\mathbb{S}^1$ homogeneous functions with compact support. We also show that these isoresonant potentials can change the order of the resonances. Finally, sometimes, resonances are defined as the poles of the scattering operator : we prove that in this framework we also have the isoresonance of our potentials.

Key words : Laplacian, resonances, symmetries, perturbation, scattering.